Esercizi svolti

1. Curve nel piano

1.1

Si trovi l'equazione della circonferenza di centro (1,2) e raggio 2.

SOLUZIONE

Applicando la definizione di circonferenza come luogo di punti equidistanti dal centro si ha

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

1.2

Si trovi l'equazione della circonferenza di centro $P=(1,2)$ passante per $A=(1,1)$.

SOLUZIONE

Anzitutto si calcola il raggio della circonferenza, cioè la distanza fra *C* e *A*, che risulta 1.
Applicando la definizione di circonferenza come luogo di punti equidistanti dal centro si ha allora

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

1.3

Si dica se l'equazione

$x^2+y^2-2x+4y-1=0$

rappresenta una circonferenza e, in caso affermativo, se determinino centro e raggio.

SOLUZIONE

Usando il metodo di completamento quadrati, l'equazione assegnata diventa

$(x-1)^2+(y+2)^2-1-4-1=0$

cioè

$(x-1)^2+(y+2)^2=6$

che è l'equazione della circonferenza di centro (1,–2) e raggio $\sqrt{6}$.

1.4

Si trovi l'equazione della circonferenza C, se esiste, passante per $O=(0,0)$, $A=(1,1)$, $B=(1,0)$.

SOLUZIONE

La circonferenza C esiste in quanto i punti non sono allineati e la sua equazione è del tipo

$x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Imponendo che i tre punti assegnati appartengano a tale circonferenza si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=-2 \\ a+c=-1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=-1 \quad b=-1 \quad c=0$.

Quindi l'equazione richiesta è $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

1.5

Data la retta $r: x + y - 1 = 0$ e la circonferenza $c: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ si determini la loro posizione reciproca e si trovino gli eventuali punti comuni.

SOLUZIONE

Conviene cominciare con la ricerca dei punti comuni, le cui coordinate sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

che può essere risolto risolvendo la prima equazione rispetto ad una variabile (ad esempio *y*) e sostituendo nella seconda. Si trova quindi

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha 2 soluzioni reali, e se ne deducono 2 punti comuni:

$$P(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \qquad Q(1-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Retta e circonferenza sono quindi secanti.

1.6

Data le due circonferenze

$c_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$c_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2$

si determini la loro posizione reciproca e si trovino gli eventuali punti comuni.

SOLUZIONE

Conviene cominciare con la ricerca dei punti comuni, le cui coordinate sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \\ (x-2)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di quarto grado, che però si trasforma immediatamente in uno di secondo sottraendo membro a membro le due equazioni (geometricamente ciò equivale a sostituire una delle due circonferenze con il loro asse radicale). Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si ottengono i due punti

$$P\left(\frac{8+2\sqrt{6}}{5}, \frac{4+\sqrt{6}}{5}\right) \qquad Q\left(\frac{8-2\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$$

e si conclude che le circonferenze sono secanti.

1.7

Si trovi la retta r tangente alla circonferenza

$x^2+y^2-2x+3y=0$

nel suo punto $O=(0,0)$.

SOLUZIONE

Il centro delle circonferenza è $P=(1,-\frac{3}{2})$ e la tangente è la retta per O con direzione ortogonale a $P-O=P$. Quindi $r: 2x-3y=0$.

2. Coniche

2.1

Si consideri la conica C di equazione

$x^2+4y^2-4xy+2y=0$.

1. Si riconosca C, se ne determini una forma canonica C' e una riduzione di C di C'.
2. Si determinino centro (se esiste), vertici/e, assi/e, direttrice (se esiste), fuochi/o di C.

SOLUZIONE

1. La matrice associata a C è

$$M=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

e la matrice associata alla parte quadratica è

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

Poiché $D(A)=0$ e $D(M)=-1$, la conica è una parabola.

Gli autovalori di A sono $\alpha=tr\,A=5$ e $\beta=0$ e la forma canonica avrà equazione del tipo

$\alpha x^2-2\gamma y=0$

con $\gamma=\pm\sqrt{-\dfrac{D(M)}{trA}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Quindi abbiamo le possibili forme canoniche $y=\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{2}x^2$.

Determiniamo ora una isometria $f(X)=NX+P$ che trasforma una delle forme canoniche considerate in C.

Una base ortonormale di autovettori per A è data dagli autovettori

$X_\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$, $X_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

relativi a 5 e 0 rispettivamente, quindi possiamo porre

$$N=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Il punto P è il vertice della parabola, che è soluzione del sistema parametrico

$$\begin{cases} x^2+4y^2-4xy+2y=(x-2y)^2+2y=0 \\ x-2y=-\dfrac{2\gamma}{\sqrt{5}} \\ -2x+4y=-1-\dfrac{\gamma}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Abbiamo quindi $\gamma=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $P=(\frac{6}{25},\ -\frac{2}{25})$ e l'isometria

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\frac{2}{25}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

è la riduzione di C alla forma canonica C': $y=-\frac{5\sqrt{5}}{2}x^2$.

2. Il centro non esiste in questo caso e il vertice è stato determinato in 1. Vi è un solo asse, che è la retta per il vertice di direzione X_0, cioè

$$\begin{cases} x=2t+\dfrac{6}{25} \\ y=t-\dfrac{2}{25} \end{cases}$$

Il fuoco e la direttrice di C' sono $F'=(0,-\frac{1}{10\sqrt{5}})$ e d': $y=\frac{1}{10\sqrt{5}}$ rispettivamente,

quindi abbiamo $F=f(F')=(\frac{4}{25},-\frac{3}{25})$, $\quad d=f(d'):\begin{cases} x=t+\dfrac{8}{25} \\ y=-2t-\dfrac{1}{25} \end{cases}$

come fuoco e direttrice di C.

2.2

Si consideri la conica

$C:3x^2+3y^2+2axy+2x+1=0$.

1. Si riconosca C al variare del parametro reale a.

2. Per $a=\frac{5}{2}$ si determinino centro (se esiste), assi/e e vertici/e di C.

SOLUZIONE

La matrice associata a C è

$$M = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la matrice associata alla parte quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo $tr(A) = 6,\ \ D(A) = 9 - a^2, \quad D(M) = 6 - a^2$.

- se $\sqrt{6} < |a| < 3$, C è una ellisse in quanto $D(A) > 0$ e $D(M)tr(A) < 0$;
- se $|a| < \sqrt{6}$, C è il vuoto in quanto $D(A) > 0$ e $D(M)tr(A) > 0$;
- se $|a| > 3$, C è una iperbole;
- se $a = \pm 3, C$ è una parabola.
- se $a = \pm\sqrt{6}$, C è un punto.

2. Per $a = \frac{5}{2}, C$ è una ellisse, quindi il centro P è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} 3x + \frac{5}{2}y = -1 \\ \frac{5}{2}x + 3y = 0 \end{cases}$$

da cui $P = \frac{2}{11}(-6, 5)$.

Gli assi sono le rette r, s per P con direzione gli autovettori di A, quindi

$$r : \begin{cases} x = t - \frac{12}{11} \\ y = t + \frac{10}{11} \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t - \frac{12}{11} \\ y = -t + \frac{10}{11} \end{cases}$$

I vertici sono i quattro punti di intersezione tra C e gli assi.

2.3

Data la conica $C: 4x^2+3y^2-4=0$, si verifichi che i punti $P=(\frac{1}{2},1)$, $Q=(1,0)$ appartengono a C e si determinino le tangenti a C in P e Q.

SOLUZIONE

Per la verifica è sufficiente sostituire le coordinate di P e Q nell'equazione di C ottenendo 0.

La generica retta r per P ha equazioni

$$r: \begin{cases} x = at + \frac{1}{2} \\ y = bt + 1 \end{cases}$$

Cerchiamo l'intersezione una tale retta con C sostituendo x, y nell'equazione di C: otteniamo $(4a^2+3b^2)t^2+(4a+6b)t=0.$

La retta è tangente quando questa equazione ha una sola soluzione con molteplicità 2, cioè per $4a+3b=0.$ Quindi la tangente in P è

$$r: \begin{cases} x = 3t + \frac{1}{2} \\ y = -4t + 1 \end{cases}$$

Per Q si può procedere in modo analogo, oppure osservare che è un vertice della conica (che è una ellisse) e che quindi la tangente s è la retta per Q ortogonale all'asse a cui Q appartiene: dunque $s: x=1.$

2.4

Si determinino le parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate e passanti per A=(0,2) e B=(2,1).

SOLUZIONE

Sia C una parabola con soddisfa alle nostre ipotesi e sia

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tB & c \end{bmatrix}$$

la sua matrice associata. Poiché l'asse ha la direzione dell'autovettore di A relativo all'autovalore 0, abbiamo che una base ortonormale di autovettori per A è la base canonica e che quindi A è già della forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\alpha \neq 0.$

Quindi possiamo scrivere l'equazione di C nella forma $y = ax^2+bx+c$, con $a \neq 0$. Imponendo il passaggio per i punti dati otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c = 2 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases}$$

che ha risolventi $c = 2,\ b = -2a - 1$.

Le parabole richieste sono dunque infinite, cioè tutte quelle di equazione

$y = ax^2 - (2a+1)x + 2$

con $a \neq 0$.

2.5

Trovare l'equazione della (delle) circonferenze di raggio 1 tangenti nel punto (–2, –1) alla parabola di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + y = 0$

SOLUZIONE

Ricordiamo che, se C è una conica non degenere con matrice associata

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tB & c \end{bmatrix}$$

e se $P \in C$, la retta tangente a C in P ha equazione ${}^t(AP + B)X + {}^tBP + c = 0$.

Da tale formula otteniamo che la tangente alla parabola nel punto dato ha equazione $2x - 3y + 1 = 0$.

Le circonferenze richieste sono quelle che hanno il centro sulla retta perpendicolare per lo stesso punto, che ha equazione $3(x+2) + 2(y+1) = 0$, a distanza 1 dal punto dato. Si trovano così i centri delle due circonferenze soluzioni del problema.

2.6

Si verifichi che la conica $C: x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x = 0$ è una iperbole e se ne determinino gli asintoti.

SOLUZIONE

La matrice della parte quadratica è $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ che ha determinante negativo, mentre si verifica che il determinante della matrice associata a C è non nullo, quindi C è una iperbole.

Per determinarne gli asintoti è possibile utilizzare una riduzione f di C a una forma canonica C'.

Gli asintoti saranno le trasformate degli asintoti di C' (che hanno una espressione nota) tramite f.

Alternativamente, si può osservare che la parte quadratica di una iperbole si può sempre fattorizzare in un prodotto di due fattori lineari: nel nostro caso

$x^2 + 2y^2 + 3xy = (x+y)(x+2y)$.

Allora si prova che gli asintoti sono le rette per il centro parallele alle rette $x + y = 0,\ x + 2y = 0$.

Poiché il centro è $(-8, 6)$, gli asintoti sono le rette $x + y + 2 = 0,\ x + 2y - 4 = 0$.

3. Sfere e circonferenze

3.1

Data la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il punto C=(1,1,–1), determinare la sfera di centro C tangente a r.

SOLUZIONE

La generica sfera di centro C ha equazione

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = R^2 .$$

Si tratta di determinare R imponendo la condizione di tangenza con r. Le intersezioni fra r e la sfera considerata si trovano sostituendo nell'equazione della sfera le equazioni parametriche di r :

$$(t-1)^2 + (t-1)^2 + (2t+1)^2 = R^2 .$$

Quindi deve essere $6t^2 + 3 - R^2 = 0$

e la tangenza si ha quando tale equazione ha una e una sola soluzione, cioè per $R = \sqrt{3}$.

3.2

Data la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il punto C=(1,1,–1), trovare la circonferenza di centro C e tangente a r

SOLUZIONE

Nello spazio una circonferenza può essere rappresentata con una coppia di equazioni, relative una ad una sfera qualsiasi contenente la circonferenza, l'altra al piano contenente la circonferenza. La prima di tali equazioni è stata trovata nell'esercizio precedente, sotto forma dell'equazione della sfera che ha la circonferenza cercata come cerchio massimo. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano contenente il punto e la retta assegnati, che risulta $x - y = 0$. Le equazioni della circonferenza richiesta sono dunque

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

3.3

Dati il piano $\alpha : x + y - z = 0$

e il punto A=(1,1,–1), determinare le sfere tangenti a α in B=(1,1,2) e passanti per A.

SOLUZIONE

Sia S una sfera che soddisfa alle condizioni richieste. Allora il centro di S appartiene alla retta passante per B e ortogonale a α, quindi è un punto del tipo $P(t)=(t+1, t+1, -t+2)$.

Siccome sia A che B devono appartenere a S, dovrà essere $d(A,P(t))=d(B,P(t))$, da cui $3t^2 = 2t^2+(3-t)^2$: quindi $t=\frac{3}{2}$ e S è la sfera di centro $(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.4

Date le rette sghembe

$$r:\begin{cases} x+y=0 \\ x+y+2z+2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

si studi al variare di $R>0$ l'esistenza di sfere tangenti a *s* e con centro su *r*.

SOLUZIONE

Rappresentando r in forma parametrica otteniamo

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$$

Quindi il centro di una sfera che soddisfa alle ipotesi del problema è un punto del tipo $P(t)=(t,-t,-1)$. Il piano α per $P(t)$ ortogonale a s ha equazione $x+y=0$ per ogni t, quindi $Q=\alpha\cap s=(0,0,1)$. Ponendo $d(P(t),Q)=\sqrt{2t^2+4}=R$, abbiamo $t=\pm\sqrt{\frac{R^2-4}{2}}$.

Quini abbiamo due sfere se $R>2$, una sfera se $R=2$ e nessuna se $R<2$.

3.5

Verificare che le due sfere

$$S: x^2+y^2+z^2+x+y+z=0 \qquad S': x^2+y^2+z^2+x+2y+z=0$$

si intersecano in una circonferenza *C*. Determinare le rette tangenti a *C* e passanti per:

1. $A=(-1,0,-1)$;
2. $B=(1,0,-2)$.

SOLUZIONE

L'insieme $S\cap S'$ è rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2+x+2y+z=0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione alla seconda otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+x+y+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

La sfera S ha centro $P=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ e raggio $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$, che è maggiore della distanza di P dal piano $y=0$, quindi il sistema precedente rappresenta una circonferenza C.

Alternativamente, possiamo osservare che S' ha centro $P'=(-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})$ e raggio $R'=\sqrt{\frac{3}{2}}$,

da cui $R'-R<d(P,P')=\frac{1}{\sqrt{2}}<R'+R$; questa relazione implica la nostra tesi.

1. Il punto A appartiene alla circonferenza, quindi vi è una sola tangente che è l'intersezione del piano α tangente a S in A con il piano $y=0$ contenente C. Il piano α

è il piano passante per A con direzione ortogonale data da $A-P=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$,

quindi $\alpha: x-y+z+2=0$ e la tangente è data da

$$\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

2. Il punto B è esterno a S e appartiene al piano $y=0$, quindi è esterno a C: avremo due rette tangenti. Il sistema che rappresenta C è equivalente a

$$\begin{cases} x^2+z^2+x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

La generica retta per B nel piano $y=0$ ha equazioni

$$\begin{cases} x=lt+1 \\ y=0 \\ z=mt-2 \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema otteniamo l'equazione $(l^2+m^2)t^2+3(l-m)t+4=0$ che ha soluzioni

coincidenti per $7l^2-9lm+7m^2=0$. Ponendo m = 1, si trova $l=\frac{9\pm\sqrt{32}}{7}$ e quindi le due rette tangenti

$$r:\begin{cases} x=\frac{9+\sqrt{32}}{7}t+1 \\ y=0 \\ z=\frac{9+\sqrt{32}}{7}t-2 \end{cases} \qquad r':\begin{cases} x=\frac{9-\sqrt{32}}{7}t+1 \\ y=0 \\ z=\frac{9-\sqrt{32}}{7}t-2 \end{cases}$$

3.6

Scrivere equazioni cartesiane e parametriche per la circonferenza C passante per i punti $A=(2,0,0), B=(1,1,0), C=(0,1,1)$ e trovarne centro e raggio.

SOLUZIONE

I tre punti non sono allineati, quindi per essi passa una e una sola la circonferenza. Il piano α per tali punti ha equazione $x+y+z-2=0$. La circonferenza è l'intersezione di α con una qualsiasi sfera contenente i punti. Consideriamo l'equazione generica di una sfera

$S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Imponendo il passaggio per i tre punti assegnati, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2a+d=-4 \\ a+b+d=-2 \\ b+c+d=-2 \end{cases}$$

Scegliendo ad esempio d = 0 si trova a = –2, b = 0, c = –2, e si hanno le equazioni cartesiane della circonferenza richiesta:

$$C: \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-2z=0 \end{cases}$$

C è rappresentata come intersezione del piano $\alpha: x+y+z-2=0$ con la sfera di centro P=(1,0,1) e raggio $R=\sqrt{2}$. Il centro della circonferenza è l'intersezione del piano con la retta perpendicolare per P che ha equazioni

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t \\ z=t+1 \end{cases}$$

Si trova che centro della circonferenza è ancora P=(1,0,1). (Il fatto che coincida con il centro della sfera è dovuto alla particolare scelta della sfera). Quindi C è un cerchio massimo e ha raggio $r=\sqrt{2}$.

Per scrivere delle equazioni parametriche di C si determina una base ortonormale X_1, X_2 del sottospazio $\alpha_0: x+y+z=0$. Posto $X_0=(1,1,1)$ e scelto $X_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, sia X_2 il normalizzato di $X_0 \wedge X_1$: $X_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$.

Un punto su C è rappresentato da $r(\cos\theta X_1+\sin\theta X_2+P)$, da cui le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta)+1=\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+1 \\ y=\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta)=-\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ z=\sqrt{2}(-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta)+1=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta+1 \end{cases}$$

con $0\le\theta\le 2\pi$.

4. Superfici e curve nello spazio

4.1

Riconoscere le quadriche

$Q: x^2 - y^2 + 2z^2 - 4y + 6z + 1 = 0$

e

$Q': x^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$

SOLUZIONE

Q: per completamento dei quadrati abbiamo $Q: -x^2 + (y+2)^2 - 2(z+\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

Quindi Q è un iperboloide a 2 falde con centro $(0, -2, -\frac{3}{2})$ e semiassi

$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{2}$.

Q': abbiamo $Q': x^2 + (z+2)^2 - 2(y - \frac{3}{2}) = 0$, quindi Q' è un paraboloide ellittico

con vertice $(0, \frac{3}{2}, -2)$ e semiassi $a = b = \sqrt{2}$.

4.2

Provare che la curva *C* di equazioni parametriche

$$C: \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 2t^2 + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

è piana.

SOLUZIONE

Si deve verificare che esiste un piano che contiene totalmente la curva *C*. Un piano generico ha equazione

$ax + by + cz + d = 0$

con *a*, *b*, *c* non tutti nulli. Le sue intersezioni con *C* corrispondono ai valori di *t* soluzioni dell'equazione

$a(t^2 + t) + b(2t^2 + 1) + c(t + 2) + d = 0$

cioè

$(a + 2b)t^2 + (a + c)t + (b + 2c + d) = 0$

La curva è piana se tale equazione è soddisfatta per ogni valore di *t*. Ma un'equazione di secondo grado ammette al più due soluzioni, quindi l'unica possibilità è che si annullino tutti i suoi coefficienti, cioè:

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ a+c=0 \\ b+2c+d=0 \end{cases}$$

La condizione di planarità della curva equivale dunque al fatto che tale sistema ammetta almeno una soluzione con *a*, *b*, *c* non tutti nulli. Si trova la soluzione

$$\begin{cases} a=-2b \\ c=2b \\ d=-5b \end{cases}$$

con *b* variabile indipendente. Assegnandole, ad esempio, il valore -1, si conclude che la curva è contenuta nel piano di equazione

$2x-y-2z+5=0$.

4.3

Si consideri la conica C nello spazio di equazioni

$$\begin{cases} x^2-4y^2-z^2+4yz+6z+2=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

1. Si riconosca C;
2. Si determini una parametrizzazione di C.

SOLUZIONE

1. Sostituendo nel sistema $x=2z-y$ otteniamo C in sezione cilindrica:

$$\begin{cases} -3y^2+3z^2+6z+2=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

L'equazione della direttrice principale nel piano $x=0$ per mezzo di completamento dei quadrati diventa $3y^2-3(z+1)^2-1=0$, quindi C è una iperbole.

2. Possiamo parametrizzare in $x=0$ i due rami della direttrice principale con

$$\begin{cases} y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh t \\ z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh t-1 \end{cases}$$

per t reale, quindi una parametrizzazione di C è

$$\begin{cases} x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cosh t + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sinh t - 2 \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cosh t \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sinh t - 1 \end{cases}$$

4.4

Determinare e riconoscere la proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ della curva C di equazioni parametriche

$$C:\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 2t^2 + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Sostituendo $t = z - 2$ e sottraendo la seconda equazione alla prima moltiplicata per 2 otteniamo che la curva è piane e ha equazioni cartesiane

$$C:\begin{cases} y = (z-2)^2 + 1 \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

(Infatti è la stessa dell'Es.4.2!).

La proiezione ortogonale di C è la direttrice principale C_0 del cilindro di direttrice C e direzione canonica e_3. Sostituendo

$$z = x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$$

otteniamo

$$C_0:\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 4y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si verifica che C_0 (e quindi anche C) è una parabola con asse parallelo alla retta $2x - y = z = 0$.

4.5

Determinare un'equazione cartesiana del cono di vertice l'origine e direttrice la curva

$$C:\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 2t^2 + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE

La curva C come sezione cilindrica ha equazioni cartesiane

$$C:\begin{cases}(2x-y)^2+4(x-y)+3=0\\ 2x-y-2z+5=0\end{cases}$$

(vedi Es.4.4).

Allora (x,y,z) appartiene al cono cercato se e solo se esiste $u\neq 0$ tale che $(\frac{x}{u},\frac{y}{u},\frac{z}{u})\in C$.
Sostituendo nelle equazioni di C e ricavando u otteniamo

$$C:\begin{cases}(2x-y)^2+4(x-y)u+3u^2=0\\ u=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}z\end{cases}$$

Sostituendo u nella prima equazione abbiamo l'equazione del cono:

$$38x^2+7y^2+3z^2-43xy-16xz+13yz=0$$

(Come si vede, le operazioni di eliminazione di parametri possono richiedere calcoli pesanti).

4.6
Data la circonferenza

$$C:\begin{cases}y=0\\ (x-4)^2+z^2=2\end{cases}$$

Determinare l'equazione del toro T ottenuto come figura di rotazione attorno all'asse z generata da C.

SOLUZIONE
Il punto generico (a,b,c) su C soddisfa alle equazioni

$$\begin{cases}b=0\\ (a-4)^2+c^2=2\end{cases}$$

La circonferenza generata dalla rotazione di tale punto intorno all'asse z ha equazioni:

$$C':\begin{cases}z=c\\ x^2+y^2=a^2+b^2\end{cases}$$

Quindi i punti della superficie richiesta soddisfano alle equazioni

$$\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ b = 0 \\ (a-4)^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

L'equazione cartesiana di T si trova eliminando *a*, *b*, *c* da tali equazioni. Sostituendo la prima e la terza nelle rimanenti ci si riduce alle due equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (a-4)^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

da cui si deve eliminare *a*. La seconda fornisce $a^2 = 8a - 14 - z^2$, e
sostituendo nella prima

$$x^2 + y^2 = 8a - 14 - z^2$$

da cui si trae $a = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 14}{8}$. Infine si trova l'equazione richiesta:

$$T : x^2 + y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 14}{8}\right)^2$$

4.7

Determinare e riconoscere le sezioni piane del toro T dell'esercizio 4.6 ottenute con i piani $z = k$.

SOLUZIONE

Le curve cercate hanno equazioni cartesiane

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = \left(\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 14}{8}\right)^2 \end{cases}$$

equivalenti a

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = \left(\dfrac{x^2 + y^2 + k^2 + 14}{8}\right)^2 \end{cases}$$

Passando alle coordinate polari, con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, la seconda equazione può essere riscritta nella forma

$$\rho^2 = \left(\frac{\rho^2 + k^2 + 14}{8}\right)^2$$

da cui

$$\rho^4 + 2(k^2 - 18)\rho^2 + (k^2 + 14)^2 = 0.$$

Si conclude che:

1. se $|k| < \sqrt{2}$, $T \cap \{z = k\}$ è una coppia di circonferenze con centro comune $(0,0,k)$;
2. se $|k| = \pm\sqrt{2}$, $T \cap \{z = k\}$ è una circonferenza con centro $(0,0,k)$;

3. se $|k| > \sqrt{2}$, $T \cap \{z = k\}$ è vuoto.