Esercizi svolti

1. Sistemi di riferimento e vettori

1.1

Dati i vettori $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ determinare:

1. il vettore $2\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{u}$;
2. gli angoli formati da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$;
3. i vettore paralleli alle bisettrici di tali angoli;
4. il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}$ su $\boldsymbol{v}$ e la sua norma;
5. il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ su $\boldsymbol{u}$ e la sua norma.

SOLUZIONE

1. $2\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{u} = 8\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.
2. Per la formula del prodotto scalare abbiamo $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{u}| \cos\alpha$; quindi gli angoli formati dai due vettori sono i due angoli tra 0 e 2π che soddisfano alle equazioni
   $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$.
3. Due vettori paralleli alle bisettrici sono dati dalla somma e dalla differenza dei versori normalizzati dei due vettori:
   $\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$
4. La proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}$ su $\boldsymbol{v}$ è il multiplo $a\boldsymbol{v}$ di $\boldsymbol{v}$ tale che la norma di $\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v}$ è minima, cioè quando $\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$. Questo si ottiene ponendo $a = (|\boldsymbol{u}|/|\boldsymbol{v}|)\cos\alpha$; quindi il vettore richiesto è $\frac{2}{3}\boldsymbol{v}$, che ha norma $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
5. Si procede in modo analogo al punto 4, notando che i vettori ottenuti sono diversi anche in norma.

1.2

Trovare i vettori di modulo a fissato, la cui proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ è il vettore (1,3,0) (discutere al variare del parametro a).

SOLUZIONE

I vettori la cui proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ è il vettore (1,3,0) sono della forma $(1,3,z)$ con z arbitrario. Quelli con il modulo richiesto devono soddisfare l'equazione

$$\sqrt{10 + z^2} = a$$

cioè

$$z^2 - a^2 + 10 = 0$$

Tale equazione di secondo grado in z ha rispettivamente nessuna, una, due soluzioni, a seconda che il parametro a (che è intrinsecamente non negativo) sia minore, uguale o maggiore di $\sqrt{10}$.

1.3

Usando il prodotto vettore trovare i valori di t per cui sono i vettori $X_1 =(t,t,1-t)$, $X_2 =(1,t,2)$, $X_3 =(0,1,1)$ appartengono allo stesso sottospazio vettoriale.

SOLUZIONE

I vettori appartengono allo stesso sottospazio vettoriale se e solo se il loro prodotto misto è nullo. Tale condizione equivale alll'equazione

$t^2 - 4t + 1 = 0$

e quindi le soluzioni sono $t = 2 \pm \sqrt{3}$.

1.4

Trovare la proiezione ortogonale del vettore (1,1,–2) sul sottospazio generato da (1,0,–1) e (1,2,–1).

SOLUZIONE

Un possibile metodo consiste nei seguenti 3 passi:

1. Trovare un vettore ***v*** perpendicolare al piano, quindi ai due vettori dati.
2. Proiettare ortogonalmente il vettore dato su ***v*** (si veda esercizio 1.1), ottenendo un vettore ***u.***
3. Sottrarre ***u*** dal vettore dato.

Segue il dettaglio dei tre passi:

1. ***v*** si può ottenere dal prodotto vettoriale fra i due vettori dati, trovando ***v*** = (2,0,2)
2. Ripetendo quanto fatto nell'esercizio 1.1, si trova ***u*** = $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1)$.
3. Il vettore proiezione è quindi $(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, -2+\frac{1}{\sqrt{3}})$.

1.5

Consideriamo un triangolo ABC. Dimostrare che:

1. Esiste ed è unico il baricentro del triangolo, cioè il punto G che soddisfa a
   $(G-A)+(G-B)+(G-C)=0$
2. G è il punto d'incontro delle tre mediane del triangolo

SOLUZIONE

1. Sia O l'origine del sistema di riferimento, eventualmente coincidente con un vertice. La relazione richiesta equivale a
   $(G-O)+(O-A)+(G-O)+(O-B)+(G-O)+(O-C)=0$
   cioè
   $(G-O)=\frac{1}{3}((A-O)+(B-O)+(C-O))$
   che prova esistenza e unicità di G
2.
3. Scegliamo l'origine O coincidente con uno dei vertici del triangolo, ad esempio A. Allora la relazione sopra trovata diventa

$$(G - A) = \frac{1}{3}((B - A) + (C - A))$$

che dice che G si trova ad 1/3 della diagonale del parallelogramma di lati AB e AC, a partire da A. Lo stesso si può ripetere per gli altri vertici.

2. Rette

2.1

Sono date nel piano le rette *r* e *s*, di equazioni rispettivamente

$x+2y-2=0 \qquad 4x-2y-3=0$

1. Verificare che *r* e *s* sono ortogonali.
2. Trovare le equazioni delle bisettrici degli angoli formati da *r* e *s*.

SOLUZIONE

1. Il vettore (1,2) è ortogonale a *r* e il vettore (4, –2) è ortogonale a *s*; il loro prodotto scalare è nullo, quindi tali vettori sono ortogonali fra di loro, e di conseguenza anche le rette.
2. Da considerazioni geometriche si ha che sommando e sottraendo due versori aventi la direzione di ciascuna delle due rette si ottengono vettori aventi le direzioni delle bisettrici. Le bisettrici saranno quindi le rette aventi tali direzioni e passanti per il punto comune a *r* e *s*.

   I versori in questo caso sono $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ per r e $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\,2)$ per s, in quanto ortogonali alle direzioni ortogonali. Quindi i vettori di direzione delle due bisettrici richieste sono $(3,1)$ e $(1,-3)$.

   Il punto di intersezione fra *r* e *s* si trova risolvendo il sistema

   $$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ 4x-2y-3=0 \end{cases}$$

   e risulta $(1, \frac{1}{2})$.

   Si conclude che le equazioni parametriche delle due bisettrici richieste sono:

   $$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t+\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Eliminando il parametro si hanno le equazioni cartesiane

   $2x-6y+1=0$ e $6x+2y-7=0$.

2.2

Dati il punto *P*=(1, –2) e la retta $r:\ x+3y+1=0$, trovare:

3. l'equazione della retta per *P* perpendicolare a *r*
4. l'equazione della retta per *P* parallela a *r*
5. le equazioni delle rette passanti per *P* e formanti un angolo di $\pi/6$ con *r*

SOLUZIONE

1. La retta *r* è perpendicolare al vettore (1,3). Quindi la retta richiesta ha equazioni parametriche

   $$\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t-2 \end{cases}$$

   e equazione cartesiana $3x-y-5=0$

2. La retta r è parallela al vettore (3, –1). Quindi la retta richiesta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -t - 2 \end{cases}$$

e equazione cartesiana $x + 3y + 5 = 0$

3. La retta generica passante per P ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = lt + 1 \\ y = mt - 2 \end{cases}$$

Si tratta quindi di imporre che il vettore (l, m) formi l'angolo richiesto con un vettore parallelo a r, cioè (3, –1). Possiamo assumere che (l, m) sia un versore: allora esprimendo il prodotto scalare in funzione dell'angolo e delle norme si ha

$$(l, m).(3,-1) = \sqrt{10}\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{10}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3l - m = \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ l^2 + m^2 = 1 \end{cases}$$

Sostituendo m si trova l'equazione $20l^2 - 6\sqrt{30}l + 13 = 0$, che ha due soluzioni reali l_1, l_2 (determinarle) e dalle quail otteniamo m_1, m_2 e quindi le rette cercate.

2.3

Date nello spazio le due rette:

$$r:\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t - 2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = u \\ y = -u + 1 \\ z = u + 1 \end{cases}$$

1. Verificare che sono sghembe.
2. Trovare la perpendicolare comune e calcolare la distanza minima fra r e s

SOLUZIONE

1. Per verificare che due rette sono sghembe, è sufficiente verificare che non sono parallele, e non hanno un punto in comune. Le due rette date non sono parallele, perchè la prima ha la direzione del vettore (0,1,1), e la seconda del vettore (1, –1,1), che non sono paralleli. Quanto all'eventuale punto in comune, si trova risolvendo il sistema di 6 equazioni nelle 5 incognite x, y, z, t, u

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t - 2 \\ x = u \\ y = 1 - u \\ z = 1 + u \end{cases}$$

Poichè si vede immediatamente che tale sistema non ha soluzioni, si conclude che le rette sono sghembe.

2. Per trovare la perpendicolare comune a due rette sghembe, si può procedere scegliendo due punti arbitrari *P(t)* e *Q(u)* delle due rette e imponendo che la retta passante per tali punti sia perpendicolare ad entrambe. Poiché $P(t) = (1, t, t-2)$ e $Q(u) = (u, -u+1, u+1)$, abbiamo $P(t) - Q(u) = (1-u, t+u-1, t-u-3)$, che deve essere ortogonale a (0,1,1) e a (1, –1,1). Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2t - 4 = 0 \\ 3u + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $t = 2$, $u = -\frac{1}{3}$.

Otteniamo dunque i punti $P_0 = (1,2,0)$ e $Q_0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e la distanza richiesta è

$$\|P_0 - Q_0\| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

La perpendicolare comune ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}t + 1 \\ y = \frac{2}{3}t + 2 \\ z = -\frac{2}{3}t \end{cases}$$

2.4

Si determini la posizione reciproca delle rette

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t - 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 2t \end{cases}$$

SOLUZIONE

Sono la stessa retta: infatti hanno la stessa direzione e un punto in comune (ad esempio (0,0,–2), che corrisponde a valore del parametro 0 per la prima e –1 per la seconda).

3. Piani nello spazio

3.1

Si determini la posizione reciproca delle rette

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} y-2x=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Sono la stessa retta, rappresentata in forma parametrica e in forma cartesiana. Infatti cercandone le intersezioni si trovano infiniti punti.

Alternativamente, la direzione di s, che è data da $(0,1,-2)\wedge(1,0-1)=-(1,2,1)$, è la stessa di r, e si verifica subito che il punto $(0,0,-2)$ appartiene a entrambe.

3.2

Date le rette

$$r:\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x-2z-2=0 \end{cases}$$

trovare le equazioni di tutti i piani paralleli sia ad *r* che ad *s*. Esiste fra questi un piano che contenga *r*? Ne esiste uno che contenga sia *r* che *s*?

SOLUZIONE

Le direzioni di r e s sono rispettivamente $(1,-1,0), (2,1,2)$ in quanto

$(1,1,0)\wedge(1,1,-2)=(-2,2,0)$ e $(1,-2,0)\wedge(2,0,-2)=(4,2,4)$.

I piani richiesti devono essere paralleli a entrambi tali vettori, quindi perpendicolari al loro prodotto vettoriale, che è $(-2,-2,3)$. Quindi essi hanno equazione $\alpha_d: 2x+2y-3z+d=0$ con *d* qualsiasi.

Per determinare d in modo che α_d contenga *r*, basta imporre che tale piano intersechi *r*. Una forma parametrica di r è

$$r:\begin{cases} x=t+2 \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione del piano otteniamo la condizione $d+1=0$.

Si conclude che il piano richiesto ha equazione

$2x+2y-3z-1=0.$

Si verifica che tale piano non contiene la retta *s*.

3.3

E' dato il piano $\alpha: x+2y+2z-1=0$. Determinare:

1. il simmetrico di P=(1,2,3) rispetto a α .
2. la retta simmetrica della retta $r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ rispetto a α .

SOLUZIONE

1. Il simmetrico Q di P appartiene alla retta passante per P e ortogonale a α , le cui equazioni sono

   $$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+2 \\ z=2t+3 \end{cases}$$

   Tale retta interseca α nel punto $R=(-\frac{1}{9},-\frac{2}{9},\frac{7}{9})$, che è il punto di mezzo del segmento PQ.

   Dette x,y,z le coordinate di Q, esse devono soddisfare quindi alle equazioni

   $$\begin{cases} \frac{x+1}{2}=-\frac{1}{9} \\ \frac{y+2}{2}=-\frac{2}{9} \\ \frac{z+3}{2}=\frac{7}{9} \end{cases}$$

   da cui $R=\left(-\frac{11}{9},-\frac{22}{9},-\frac{13}{9}\right)$.

2. L'intersezione di r con α è $P_0=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)$. Se P_1 è e il simmetrico di un qualsiasi altro punto di r (ad esempio $(0,0,1)$) calcolato con il metodo appena visto, la retta simmetrica a r è la retta passante per P_0 e P_1 .

3.4

Determinare il parametro a reale in modo tale che la retta r passante per l'origine e per P =(a,1,2) sia parallela al piano $a(x+y)–z$ = 0.

SOLUZIONE

La retta r ha la direzione del vettore (a,1,2), il piano considerato è perpendicolare al vettore (a,a, –1). Tali vettori devono risultare perpendicolari, quindi si ha l'equazione

$a^2+a-2=0$

le cui soluzioni sono –2 e 1.

3.5

Data la retta $r:\begin{cases} x-2z-4=0 \\ y-3z-1=0 \end{cases}$, scrivere l'equazione del piano α passante per r e parallelo all'asse z. Scrivere le equazioni della retta s che si ottiene proiettando ortogonalmente r sul piano $z=0$.

SOLUZIONE

Il fascio di piani per r ha equazione

$\lambda(x-2z-4)+\mu(y-3z-1)=0$

e si ha parallelismo con l'asse z se $2\lambda+3\mu=0$. Una soluzione è $\lambda=3, \mu=-2$, pertanto il piano richiesto ha equazione

$3x-2y-10=0$.

La proiezione di r sul piano $z=0$ è data dall'intersezione di α con tale piano.

3.6

Date due rette r, s sghembe nello spazio e un punto P non appartenente a nessuna delle due, si dica sotto quali condizioni esiste una retta l incidente a entrambe e passante per P.

Si determini l, se esiste, nel caso in cui

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t-2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=u \\ y=-u+1 \\ z=u+1 \end{cases} \quad \text{e} \quad P=(2,1,0).$$

SOLUZIONE

Siano α, β i piani passanti per P e contenenti r, s rispettivamente. La retta l esiste se e solo se α non è parallelo a s e β non è parallelo a r: in tal caso $l=\alpha\cap\beta$.

Le rette r, s sono sghembe (Es. 2.3). Usando la parametrizzazione, ricaviamo il piano α come il piano per i punti $P, P_1=(1,0,-2), P_2=(1,1,-1)$: dalla formula del piano per tre punti abbiamo

$$\alpha:\det\begin{bmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=x+y-z-3=0.$$

Analogamente

$$\beta:\det\begin{bmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=x+3y+2z-5=0.$$

Quindi

$$l:\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+3y+2z-5=0 \end{cases}$$

4. Cambiamenti di coordinate e isometrie

4.1

Trovare le coordinate cartesiane del punto di coordinate polari $(3, \frac{\pi}{6})$

SOLUZIONE

Usando direttamente le formule, si trova

$$x = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

4.2

Trovare le coordinate polari del punto di coordinate cartesiane $(-3\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$.

SOLUZIONE

Si tratta di risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \rho\cos\alpha = -3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \rho\sin\alpha = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando si ottiene $\rho^2 = 9$ e quindi $\rho = 3$ (non dimenticare che il modulo è una quantità non negativa per definizione).

Quindi $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, da cui $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

4.3

Dato il cambiamento di coordinate nello spazio

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z + 2 \end{cases}$$

1. Verificare che si tratta di un cambiamento di riferimento ortogonale.
2. Trovare le equazioni dei nuovi assi di riferimento e della nuova origine nel sistema di riferimento originario.

SOLUZIONE

1. Le equazioni definiscono una applicazione $f(X) = NX + P$, dove N è la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

mentre $P = (1,-2,2)$. Poiché N è ortogonale (le righe formano una base ortonormale), f è una isometria, quindi definisce il cambiamento di riferimento $X' = N(X - P_0)$, dove $P_0 = -{}^tNP$ è il vettore delle coordinate della nuova origine nel riferimento originario.

2. Detto $O'x'y'z'$ il nuovo sistema di riferimento, in esso gli assi x', y', z' hanno ovviamente equazioni

$$\begin{cases} y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

rispettivamente.

Sostituendo nella formula del cambiamento di coordinate e semplificando otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - z + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + z + \sqrt{2} = 0 \\ x - z + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + z + \sqrt{2} = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

La nuova origine può essere calcolata usando la formula nel punto precedente o considerando l'intersezione degli assi: risulta $O' = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4.4

Determinare la simmetria nello spazio rispetto al punto $P_0=(1,2,1)$.

SOLUZIONE

Siano (x,y,z) le coordinate di un punto generico dello spazio. Si tratta di trovare le coordinate (x', y', z') del suo simmetrico P' rispetto a P_0. Si hanno le formule

$$\begin{cases} \frac{x + x'}{2} = 1 \\ \frac{y + y'}{2} = 2 \\ \frac{z + z'}{2} = 1 \end{cases}$$

e quindi le formule richieste sono

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \\ z' = 2 - z \end{cases}$$

4.5

Determinare la simmetria assiale nello spazio rispetto alla retta $r : x = y = z$

SOLUZIONE

Dati $P = (x, y, z)$ e il suo simmetrico $P' = (x', y', z')$ rispetto alla retta r, il punto di mezzo M di P e P' deve giacere su r e P' deve appartenere al piano α ortogonale a r passante per P.

Poiché la direzione di r è $(1,1,1)$, si ha $\alpha : (X - x) + (Y - y) + (Z - z) = 0$ (abbiamo denotato le variabili con lettere maiuscole per distinguerle dalle coordinate di P). Imponendo le condizioni otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x' + x = y' + y \\ x' + x = z' + z \\ x' + y' + z' = x + y + z \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \end{cases}$$

Quindi la simmetria cercata è l'isometria (più precisamente applicazione ortogonale) $f(X) = NX$ con

$$N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che N è ortogonale e che $D(N) = -1$.