Esercizi svolti

1. Applicazioni lineari

1.1

Si consideri l'applicazione $f : \boldsymbol{K}^2 \to \boldsymbol{K}$ definita da $f(x,y) = x + y^2$ e si stabilisca se è lineare.

SOLUZIONE

Non è lineare. Possibile verifica: $f(0,2) = 4$; $f(0,4) = 16$; quindi $f(0,4) \neq 2\, f(0,2)$, mentre $(0,4) = 2\,(0,2)$.

1.2

Data f : $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = (x - y, x + 2z)$ si trovino il nucleo e l'immagine di f con le rispettive dimensioni.

SOLUZIONE

Per trovare il nucleo di f bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Si trova $x = y = -2z$ con z variabile indipendente, quindi il nucleo ha dimensione 1 e è generato da $(-2,-2,1)$.

L'immagine di f è lo spazio generato dai vettori

$f(1,0,0) = (1,1)$

$f(0,1,0) = (-1,0)$

$f(0,0,1) = (0,2)$

Si trova che la dimensione di tale spazio è 2, quindi si ha $\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{R}^2$

1.3

Si considerino:

- lo spazio $\boldsymbol{K}_n[x]$ dei polinomi nella variabile x con coefficienti nel campo $\boldsymbol{K}$ e grado $\leq n$
- lo spazio $\boldsymbol{K}^{n+1}$ delle $(n + 1)$-uple di elementi di $\boldsymbol{K}$

Si dica che relazione c'è fra $\boldsymbol{K}_n[x]$ e $\boldsymbol{K}^{n+1}$.

SOLUZIONE

I due spazi sono isomorfi attraverso l'applicazione lineare che associa ad un polinomio in $\boldsymbol{K}_n[x]$ il vettore di $\boldsymbol{K}^{n+1}$ formato dai suoi $n + 1$ coefficienti (isomorfismo delle cooordinate rispetto alla base standard di $\boldsymbol{K}_n[x]$).

1.4

Data f : $\boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ definita da $f(x, y, z, t) = (x - 5t, y + z + t, x - y - z - t)$ si trovi la matrice A tale che f è l'applicazione lineare associata a A.

SOLUZIONE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.5

Si trovino dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare considerata nell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

La dimensione dell'immagine coincide con il rango di A, che risulta essere 3.

Il nucleo è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, che risulta avere una variabile indipendente, quindi la sua dimensione è 1.

In alternativa si può usare *dim Ker f* = 4 – *dim Im f* = 4 – 3 = 1

1.6

Si stabilisca per quali h reali l'applicazione f : $\mathbf{R}^3$ -> $\mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z, t) = (x + hz, y + hz, 2hz)$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

SOLUZIONE

L'applicazione f è associata alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 2h \end{bmatrix}$.

Si calcola la dimensione dell'immagine di f, che coincide con il rango di A. Se $h \neq 0$ tale rango risulta 3, quindi l'immagine è $\mathbf{R}^3$ e l'applicazione è suriettiva, iniettiva e biiettiva.

Se invece $h = 0$ il rango è 2, e quindi f non è né suriettiva, né iniettiva, né biiettiva.

1.7

Data l'applicazione f : $\mathbf{R}^4$ -> $\mathbf{R}^4$ definita da $f(x, y, z, t) = (x, x, x, x)$, si determini una base del nucleo, una base dell'immagine, e si stabilisca se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

SOLUZIONE

L'applicazione f è associata alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ker f è definito dal sistema lineare omogeneo (una equazione e 4 incognite!) $x = 0$. Ci sono 3 variabili indipendenti, la dimensione è 3 e una possibile base è data dai vettori

(0, 1, 0, 0) , (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)

Im f è generato dai vettori colonna di *A*, quindi dal solo vettore $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, che costituisce una possibile base. La dimensione è 1, e l'applicazione non è né suriettiva, né iniettiva, né biiettiva.

1.8

Data l'applicazione f: $\boldsymbol{R}^3$ -> $\boldsymbol{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = (x - y, x - z, y - z)$, si stabilisca quale fra i seguenti vettori appartiene a *Im f*:

(0, 0, 0), (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (5, 6, 1)

SOLUZIONE

(0, 0, 0) è il vettore nullo, quindi appartiene a *Im f* banalmente.

Per gli altri si considera che *Im f* è lo spazio generato dalle colonne della matrice

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

e si trova una base di tale spazio, ad esempio $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

A questo punto basta verificare se ciascuno dei vettori assegnati è o no linearmente dipendente da v_1, v_2. Si trova così che (1, 1, 0), (-1, 0,1), (5, 6, 1) appartengono tutti a *Im f* .

2. Autovettori e autovalori

2.1

Determinare gli autovalori e gli autovettori per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

Gli autovalori sono gli zeri, se esistono, del polinomio caratteristico

$$\det\begin{bmatrix} 1-t & 3 \\ 2 & 2-t \end{bmatrix} = (1-t)(2-t) - 6 = t^2 - 3t - 4$$

e si trovano quindi risolvendo l'equazione $t^2 - 3t - 4 = 0$.

Si trovano i due valori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$, entrambi con molteplicità algebrica 1.

Ricerca degli autovettori.

1. Per trovare gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 si deve risolvere il sistema omogeneo
   $AX - \lambda_1 X = 0$
   che esplicitato diventa
   $$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$
   Tale sistema è equivalente all'equazione $x - y = 0$, quindi gli autovettori sono i vettori del tipo $X = x\ (1,1)$, con $x \neq 0$.

2. Per trovare gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 si procede in modo analogo risolvendo il sistema omogeneo
   $AX - \lambda_2 X = 0$
   che è equivalente all'equazione $2x + 3y = 0$.
   Quindi gli autovettori sono i vettori del tipo $X = x\ (3,-2)$, con $x \neq 0$.

2.2

Determinare gli autovalori e gli autovettori per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

Procedendo come per l'esercizio precedente, si calcolano le radici del polinomio caratteristico, giungendo all'equazione di quarto grado

$(2 - \lambda)(1 - \lambda)^3 = 0$.

Si trovano i due valori $\lambda_1 = 2$, con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebrica 3.

Per trovare gli autovettori relativi ai due autovalori trovati si deve risolvere il sistema omogeneo

$AX - \lambda X = 0$

dove a λ si devono sostituire separatamente i due autovalori trovati λ_1 e λ_2 .

Si trova così:

1. Gli autovettori relativi a λ_1 sono della forma $x(1,4,3,1)$ con $x \neq 0$.

2. Gli autovettori relativi a λ_2 sono della forma $y(0,1,0,0)$ con $y \neq 0$.

2.3

Determinare gli autovalori e gli autovettori per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

La matrice è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale:

1. $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica 1
2. $\lambda_2 = 2$, con molteplicità algebrica 2
3. $\lambda_3 = 3$, con molteplicità algebrica 1

Per quanto riguarda gli autovettori, si ha:

1. Gli autovettori relativi a λ_1 sono della forma $x(1,0,0,0)$ con $x \neq 0$.
2. Gli autovettori relativi a λ_2 sono della forma $y(0,1,0,0)$ con $y \neq 0$.
3. Gli autovettori relativi a λ_3 sono della forma $t(0,1,0,0)$ con $t \neq 0$.

2.4

Si trovi, se esiste, una matrice quadrata A di ordine 3 che abbia gli autovalori 0 e 1 entrambi con molteplicità 2.

SOLUZIONE

Non esiste: la somma delle molteplicità degli autovalori non può superare l'ordine.

3. Autospazi e diagonalizzazione

3.1

Diagonalizzare, se possibile, la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUZIONE

Gli autovalori (si veda 2.1) sono 4 e -1, entrambi con molteplicità algebrica 1.

L'autospazio relativo all'autovalore 4 ha dimensione 1 e un suo generatore è per esempio (1,1).

L'autospazio relativo all'autovalore -1 ha dimensione 1 e un suo generatore è per esempio (3,-2).

Quindi una base di autovettori è data da (1,1) e (3,-2) e la matrice A è diagonalizzabile.

La matrice di diagonalizzazione è

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Si ha dunque che $N^{-1} A N = D$, dove D è la matrice diagonale contenente gli autovalori sulla diagonale principale:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si consiglia di eseguire la verifica calcolando effettivamente $N^{-1} A N$

3.2

Diagonalizzare, se possibile, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

precisando inoltre molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori.

SOLUZIONE

Il polinomio caratteristico risulta $t^2(2 - t)$, e quindi gli autovalori sono 0, con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1.

L'autospazio relativo a 0 è definito dall'equazione $x = 0$, quindi la dimensione dell'autospazio è 2 e la molteplicità geometrica è 2. Inoltre una base è data dai vettori (0,1,0) e (0,0,1).

L'autospazio relativo a 2 si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Quindi la dimensione dell'autospazio è 1 e la molteplicità geometrica è 1. Inoltre una base è data dal vettore (1,1,1).

Poiché la somma delle molteplicità geometriche è 3, la matrice è diagonalizzabile. Una possibile matrice di diagonalizzazione è

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi $N^{-1} A\, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3.3

Per quali numeri reali h la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile?

SOLUZIONE

La matrice è triangolare inferiore, quindi gli autovalori sono 2, 3, h. Distinguiamo vari casi:

1. $h \neq 2$ e $h \neq 3$: in tal caso gli autovalori 2, 3 hanno molteplicità algebrica 1, mentre l'autovalore h ha molteplicità algebrica 2; poiché si verifica che la molteplicità geometrica di h è 2, la matrice è diagonalizzabile.
2. $h = 2$: in tal caso l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 3, che si prova essere uguale alla molteplicità geometrica, quindi la matrice è diagonalizzabile
3. $h = 3$: in tal caso l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2, quindi la matrice non è diagonalizzabile

3.4

Il polinomio caratteristico di una certa matrice è $-t(1-t)(5-t)(7-t)$

1. Si può concludere se la matrice è diagonalizzabile?
2. Si può trovarne una forma diagonale?
3. Si può trovare la matrice di diagonalizzazione?
4. Si può trovare una matrice con tale polinomio caratteristico?

SOLUZIONE

1. Gli autovalori sono 0, 1, 5, 7, tutti semplici, quindi la matrice è diagonalizzabile.
2. Una forma diagonale è $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

3. No, per trovare la matrice di diagonalizzazione è necessario trovare gli autovettori, e quindi conoscere la matrice di partenza.
4. La matrice trovata al punto 2 risponde alla domanda (ma ce ne sono infinite altre!).

3.5

Dimostrare che una matrice ammette l'autovalore 0 se se solo se non è invertibile.

SOLUZIONE

Se 0 è autovalore di A, il sistema omogeneo $AX = 0$ ammette soluzioni non nulle, quindi $D(A) = 0$.

3.6

Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE

Gli autovalori di A sono $2 \pm i$. Quindi A è diagonalizzabile sui complessi in quando ha autovalori coniugati (e quindi distinti), mentre non lo è sui reali.

3.7

Si studi al variare di $a \in R$ la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & a & 1-a \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

Il polinomio caratteristico di A è $(1-t)(t^2-(a+1)t+2a-1)$ che ha radici

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(a+1 \pm \sqrt{a^2-6a+5})$.

Quindi per $1 < a < 5$ la matrice A è diagonalizzabile sui complessi ma non sui reali in quanto vi sono due autovalori complessi coniugati. Per $a \geq 5$ o $a \leq 1$ gli autovalori sono reali e abbiamo delle coincidenze per $a = 5$ e $a = 1$, casi per i quali si può verificare direttamente che la matrice non è diagonalizzabile sia sui reali che sui complessi. Negli altri casi A è diagonalizzabile sui reali in quanto vi sono tre autovalori reali.

4. Matrici ortogonali e diagonalizzazione delle matrici simmetriche

4.1

Trovare una base ortonormale per il sottospazio di R^4 definito dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} x+y+t=0 \\ x+z+2t=0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si comincia a trovare una base ortogonale.

Anzitutto si risolve il sistema con un qualsiasi metodo noto. Si trova ad esempio:

$$\begin{cases} x=-2t-z \\ y=t+z \end{cases}$$

Risultano due variabili indipendenti z e t, quindi lo spazio considerato ha dimensione 2.

Un primo vettore dello spazio si ottiene assegnando, ad esempio, $z = 1$, $t = 0$, e si trova il vettore $V_1 = (-1, 1, 1, 0)$

Per trovare un secondo vettore V_2 che , insieme con V_1 , fornisca una base ortogonale, si deve considerare il sistema in cui si aggiunge un'ulteriore equazione che impone l'ortogonalità a V_1 . Si ha quindi il sistema

$$\begin{cases} x=-2t-z \\ y=t+z \\ -x+y+z=0 \end{cases}$$

Una sua soluzione non nulla è $V_2 = (-1,0,-1,1)$.

Per avere una base ortonormale basta normalizzare i vettori trovati, ottenendo

$$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0),(-\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

4.2

Data la matrice

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

diagonalizzarla, se possibile, con una matrice ortogonale.

SOLUZIONE

La matrice data è simmetrica, quindi in base al teorema spettrale il problema è risolubile.

Per trovare una matrice di diagonalizzazione ortogonale N si deve trovare una base ortonormale di autovettori di A.

Si trova che gli autovalori sono 1, -1, 4, con relativi autovettori

$(0,1,0)$, $(\sqrt{2},0,2)$,$(\sqrt{2},0,-1)$

Essendo relativi ad autovalori diversi, essi sono automaticamente ortogonali (verificarlo). Per avere la base richiesta è sufficiente normalizzarli, ottenendo

$(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},0,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-1)$

La matrice di diagonalizzazione ortogonale è dunque

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

e $\quad {}^tNAN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

4.3

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

diagonalizzarla, se possibile, con una matrice ortogonale.

SOLUZIONE

La matrice data è simmetrica, quindi in base al teorema spettrale il problema è risolubile.

Per trovare una matrice di diagonalizzazione ortogonale N si deve trovare una base ortonormale di autovettori di A.

Si trova che gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1.

In base al teorema spettrale l'autovalore 1 deve avere molteplicità geometrica 2 e il relativo autospazio è definito dall'equazione $y - z = 0$

Una base ortonormale dell'autospazio è data $(1,0,0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Passando all'autovalore 2, si trovano gli autovettori risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

In questo caso, come prevedibile, si ha un autospazio di dimensione 1, e una base ortonormale è data dal vettore $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, che è automaticamente ortogonale ai due già trovati.

La matrice ortogonale di diagonalizzazione è dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

4.4

Data la forma quadratica $x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{4}yz$

deciderne la segnatura e scriverla in forma canonica.

SOLUZIONE

Il primo passo è scrivere la matrice simmetrica associata, che risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Per trovare la forma canonica e decidere la segnatura, si devono trovare si deve trovare una base ortonormale di autovettori di *A*. Con riferimento al problema 4.3, si trova che gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1, e che una base ortonormale di autovettori è (1,0,0), $(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Poiché gli autovalori sono tutti positivi, la forma quadratica è definita positiva e la sua forma canonica è $x^2 + y^2 + 2z^2$.

5. Diagonalizzazione nel caso generale

5.1

Sia D lo spazio vettoriale delle funzioni reali infinitamente derivabili, definite su un dato intervallo, e φ l'automorfismo definito da $\varphi(f) = f'$ (derivata prima). Trovare autovalori e autovettori di φ

SOLUZIONE

Si tratta di considerare l'equazione $\varphi(f) = \lambda f$, cioè $f' = \lambda f$.

Fissato λ, si tratta di un'equazione differenziale le cui soluzioni sono $f = ce^{\lambda x}$ al variare di c nei reali. Si conclude che qualsiasi valore reale λ è autovalore, e gli autovettori corrispondenti ad un dato λ formano uno spazio di dimensione 1, con base $e^{\lambda x}$.

5.2

Sia $f : R^2 \to R^2$ un'applicazione lineare (endomorfismo) tale che

$f(1,1) = (1,2)$

$f(1,2) = (1,1)$

Si decida se f è semplice, e si trovino autovalori e autovettori di f.

SOLUZIONE

L'applicazione f dev'essere della forma $f(X) = AX$, con A matrice 2×2 e deve essere

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \text{ da cui } A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

Pochè A ha autovalori distinti 1 e -1 è diagonalizzabile e quindi l'endomorfismo è semplice.

Gli autovettori di f sono gli stessi di A:

- per l'autovalore 1, tutti i multipli non nulli di (2,3).
- per l'autovalore -1, tutti i multipli non nulli di (0,1).

5.3

Si trovi un endomorfismo $f : R^3 \to R^3$ che soddisfi alle condizioni:

1. Il nucleo di f è generato dal vettore (1, 0, 1)
2. $f(1,1,0) = (1,1,-1)$
3. (1,1,1) è autovettore di f con autovalore -2

SOLUZIONE

Le tre condizioni date equivalgono a

1. $f(1,0,1) = (0,0,0)$
2. $f(1,1,0) = (1,1,-1)$
3. $f(1,1,1) = -2(1,1,1) = (-2,-2,-2)$

Conoscendo l'azione di f su tutti i vettori di una base di R^3 (verificarlo), l'endomorfismo è univocamente determinato. Usando lo stesso metodo dell'esercizio 5.2, si trova che f è l'applicazione associata alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi si può scrivere

$f(x,y,z) = (3x - 2y - 3z, 3x - 2y - 3z, x - 2y - z)$