# Esercizi svolti

## 1. Spazi vettoriali astratti

### 1.1

Si dica se l'insieme delle coppie reali $(x , y)$ soddisfacenti alla relazione $x^2 + y^2 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{R}^2$

**SOLUZIONE**

La risposta è sì, perchè l'unica coppia reale che soddisfa l'equazione è $(0 , 0)$, quindi si tratta dello spazio vettoriale nullo.

### 1.2

Si dica se l'insieme delle coppie complesse $(x , y)$ soddisfacenti alla relazione $x^2 + y^2 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{C}^2$

**SOLUZIONE**

No. Basta osservare ad esempio che le coppie $(i , 1)$ e $(1 , i)$ appartengono entrambe a $I$ , la loro somma no.

### 1.3

Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine $n$ (reali o complesse):

1. Matrici antisimmetriche;
2. Matrici triangolari superiori;
3. Matrici a scala (con la matrice nulla) ;
4. Matrici invertibili;
5. Matrici con elemento (1,1) uguale a 0;
6. Matrici con elemento (1,1) uguale a 1.

Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $M_n$ delle matrici quadrate di ordine $n$.

**SOLUZIONE**

Tutti gli insiemi considerati sono sottoinsiemi di $M_n$. Per verificare se sono anche sottospazi, occorre verificare per ciascuno di essi le tre condizioni:

- Il vettore nullo (in questo caso la matrice nulla) appartiene all'insieme;
- chiusura rispetto alla somma, cioè che la somma di due elementi comunque presi sia un elemento dell'insieme stesso;
- chiusura rispetto al prodotto, cioè che il prodotto di un elemento comunque preso per un numero reale qualsiasi sia un elemento dell'insieme stesso.

Segue una traccia delle verifiche:

1. L'insieme delle matrici antisimmetriche è uno spazio vettoriale. Infatti la matrice nulla è antisimmetrica. Se ${}^tA = -A$ e ${}^tB = -B$, allora ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = -(A + B)$: quindi la

somma di due matrici antisimmetriche è una matrice antisimmetrica. Analogo per il prodotto per uno scalare.

2. L'insieme delle matrici triangolari superiori è uno spazio vettoriale. Infatti la matrice nulla è triangolare. Se $A$ e $B$ sono triangolari superiori, $[A]_{i,j} = [B]_{i,j} = 0$ per $i > j$, quindi $[A + B]_{i,j} = 0$, da cui la somma di due matrici triangolari superiori è una matrice triangolare superiore. Analogo per il prodotto per uno scalare.
3. L'insieme delle matrici a scala non è uno spazio vettoriale. Una possibile verifica è la seguente:

   Le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono a scala, ma la loro somma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non lo è, perchè la riga nulla non è l'ultima.
4. L'insieme delle matrici invertibili non è uno spazio vettoriale: è sufficiente osservare che la matrice nulla non è invertibile.
5. L'insieme delle matrici con l'elemento (1,1) uguale a 0 è uno spazio vettoriale. Infatti per la matrice nulla l'elemento (1,1) vale 0, la somma di due matrici in cui l'elemento (1,1) vale 0 è una matrice in cui l'elemento (1,1) vale 0, il prodotto di una matrice in cui l'elemento (1,1) vale 0 per un numero è una matrice in cui l'elemento (1,1) vale 0.
6. L'insieme delle matrici con l'elemento (1,1) uguale 1 non è uno spazio vettoriale: basta osservare che sommando due matrici del genere si ottiene una matrice in cui l'elemento (1,1) vale 2.

## 2. Sottospazi vettoriali di $K^n$

### 2.1

Sono dati in $\boldsymbol{R}^3$ i vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,2,1)$.

1. Dire se sono uno combinazione lineare dell'altro
2. Dire se il vettore $X = (2,2,3)$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$
3. Dire se il vettore $X = (5/2,3,7/2)$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$

### SOLUZIONE

1. $X_1$, $X_2$ non sono uno multiplo dell'altro in modo evidente.

2. $X$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$ se esistono scalari $c_1$ e $c_2$ tali che $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ . Questa relazione vettoriale equivale al sistema nelle incognite $c_1$ e $c_2$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 2 \\ 2c_1 + 2c_2 = 2 \\ 3c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

Tale sistema è impossibile, quindi $X$ non è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$ .

3. $X$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$ se esistono scalari $c_1$ e $c_2$ tali che $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ . Questa relazione vettoriale equivale al sistema nelle incognite $c_1$ e $c_2$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = \dfrac{5}{2} \\ 2c_1 + 2c_2 = 3 \\ 3c_1 + c_2 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzione $c_1 = 1$, $c_2 = ½$, quindi $X$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$ , precisamente $X = X_1 + ½\ X_2$ .

### SOLUZIONE ALTERNATIVA

Per i casi 2 e 3 si può usare il criterio di dipendenza, cioè considerare una matrice con nelle colonne i vettori dati, e una seconda matrice con nell'ultima colonna il vettore di cui si deve decidere se è combinazione dei precedenti. Se le due matrici hanno lo stesso rango la risposta è si, altrimenti è no. Segue l'esame dei tre casi.

1. Per vedere se $X$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$ si formano le due matrici

$$M(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(X_1, X_2, X) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   e se ne calcola il rango. La prima ha rango 2, la seconda ha rango 3, quindi $X$ non è combinazione lineare di $X_2$ e $X_2$.

2. Per vedere se $X$ è combinazione lineare di $X_1$ e $X_2$ si formano le due matrici

$$M(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(X_1, X_2, X) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5/2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7/2 \end{pmatrix}$$

e se ne calcola il rango. La prima ha rango 2, la seconda ha rango 2, quindi $X$ è combinazione lineare di $X_2$ e $X_2$.

## 2.2

Sono dati in $\boldsymbol{R}^2$ i vettori $X_1 = (1,1)$, $X_2 = (2,1)$ , $X_3 = (1,-1)$. Dire se costituiscono un insieme di generatori di $\boldsymbol{R}^2$

### SOLUZIONE

Basta verificare se un generico vettore di $\boldsymbol{R}^2$ $X = (a,b)$ è combinazione lineare dei vettori dati. Quindi si confronta il rango delle matrici

$$M(X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M(X_1, X_2, X_3, X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

Poiché tali matrici hanno rango 2 per ogni $a$ e $b$, la risposta è sì.

### SOLUZIONE ALTERNATIVA

Si può usare il criterio secondo cui certi vettori generano $\boldsymbol{R}^2$ se il rango della matrice che ha tali vettori come colonne è 2. La matrice

$$M(X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2.

## 3. Insiemi liberi, basi, dimensione

### 3.1

Sono dati in $\boldsymbol{R}^3$ i vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,2,1)$, $X_3 = (1,1,1)$.

Dire se formano un insieme libero

### SOLUZIONE

$X_1$, $X_2$, $X_3$ non formano un insieme libero se esistono scalari non tutti nulli $c_1$, $c_2$, $c_3$ tali che

$c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 = 0$ . Questa relazione vettoriale equivale alle 3 relazioni scalari

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema di tre equazioni nelle incognite $c_1$, $c_2$, $c_3$ ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Quindi i vettori considerati formano un insieme libero

### SOLUZIONE ALTERNATIVA

Per verificare se $X_1$, $X_2$, $X_3$, si calcola il rango della matrice $M(X_1, X_2, X_3)$.

Per il Criterio di Indipendenza, l'insieme è libero se solo se tale rango è uguale al numero dei vettori, cioè a 3. Poichè

$$M(X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si conclude come in precedenza.

### 3.2

Dai 4 vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,2,1)$, $X_3 = (4,4,5)$, $X_4 = (3,3,1)$ estrarre, se possibile, una base di $\boldsymbol{R}^3$.

### SOLUZIONE

Se se ne trovano 3 linearmente indipendenti, essi costituiscono la base richiesta. Ad esempio i primi 3 lo sono (verificare).

### 3.3

Dai 4 vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,2,1)$, $X_3 = (4,4,4)$, $X_4 = (2,0,-2)$ estrarre una base del sottospazio $L$ generato da tali vettori.

### SOLUZIONE

La matrice

$$M(X_1, X_2, X_3, X_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (verificare), quindi $L$ ha dimensione 2. I primi 2 generatori sono linearmente indipendenti (non sono multipli uno dell'altro) e quindi sono una base di $L$.

### 3.4

Dai vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (0,0,0)$, $X_3 = (3,2,1)$ estrarre un insieme libero.

**SOLUZIONE**

Basta scartare il secondo (verificare che l'insieme rimasto è effettivamente libero).

### 3.5

Sono dati in $\boldsymbol{R}^3$ i vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,2,1)$, $X_3 = (2,2,3)$

Trovare una base per lo spazio $L(X_1, X_2, X_3)$ e calcolarne la dimensione. Cosa si può dire di tale spazio?

**SOLUZIONE**

Poiché si trova che $X_1$, $X_2$, $X_3$ formano un insieme libero, essi una base . Pertanto la dimensione è 3. $L(X_1, X_2, X_3)$ è un sottospazio di $\boldsymbol{R}^3$ con dimensione 3, quindi coincide con $\boldsymbol{R}^3$.

### 3.6

Sono dati in $\boldsymbol{R}^3$ i vettori $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,2,1)$, $X_3 = (5/2,3,7/2)$

Trovare una base per lo spazio $L(X_1, X_2, X_3)$ e calcolarne la dimensione

**SOLUZIONE**

Poiché si trova che $X_1$, $X_2$, $X_3$ non formano un insieme libero, per trovare la base richiesta occorre scartarne uno che sia combinazione lineare degli altri. Fatto ciò, se si ottiene un insieme libero, esso è la base, altrimenti si deve continuare a scartare fino ad avere un insieme libero.

Nel caso specifico, si verifica, ad esempio, che $X_3$ è combinazione lineare di $X_1$, $X_2$, e che questi sono indipendenti. Dunque $X_1$, $X_2$ forniscono una delle basi richieste, e la dimensione è 2. In questo caso $L(X_1, X_2, X_3)$ è un sottospazio proprio di $\boldsymbol{R}^3$

**SOLUZIONE ALTERNATIVA**

Si forma la matrice

$$M(X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5/2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7/2 \end{pmatrix}$$

e la si trasforma in matrice a scala, ottenendo

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anzitutto si vede che il rango di *M’* (e quindi di *M*) è 2, quindi la dimensione del sottospazio considerato è 2. Inoltre i pivots sono 1 e –4, contenuti nelle colonne 1 e 2 della matrice *M*'. Ne segue automaticamente che una base per $L(X_1 , X_2 , X_3 )$ è fornita dalle colonne 1 e 2 di *M*, quindi dai vettori $X_1 , X_2$

### 3.7

Con riferimento all'esercizio precedente, dire se $L(X_1 , X_2 , X_3 )$ è un sottospazio proprio o no di $\boldsymbol{R}^3$ . Nel secondo caso estendere la base già trovata fino ad avere una base di $\boldsymbol{R}^3$ .

**SOLUZIONE**

$L(X_1 , X_2 , X_3 )$ non è un sottospazio proprio di $\boldsymbol{R}^3$ , perché si è visto che la sua dimensione è 2 e non 3. La base trovata per $L(X_1 , X_2 , X_3 )$ è formata $X_1$ , $X_2$ . Per estenderla ad una base di $\boldsymbol{R}^3$ è sufficiente aggiungere un vettore che non sia combinazione lineare di $X_1$ , $X_2$ . Ad esempio si può scegliere (1,0,0) (verificarlo)

**SOLUZIONE ALTERNATIVA**

Si forma la matrice

$$M(X_1, X_2, X_3, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5/2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che contiene nelle colonne i vettori dati più i vettori canonici. La si trasforma in forma diagonale ottenendo

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nella matrice ottenuta i pivots occupano le colonne 1, 2, 4, quindi si conclude che le colonne 1, 2, 4 della matrice $M$ forniscono una base per $\boldsymbol{R}^3$ .

### 3.8

Si trovi una base di $\boldsymbol{R}^2$ che non contenga nessun vettore canonico.

**SOLUZIONE**

Basta prendere due vettori non canonici e linearmente indipendenti, ad esempio $X_1$=(1,1) e
$X_2$= (1,–1)

### 3.9

Si trovino le coordinate del vettore (4,3) rispetto alla base di $\boldsymbol{R}^2$ trovata nell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Dette $x$ e $y$ le coordinate, deve valere (4,3) = $x$ (1,1) + $y$ (1,–1); quindi si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

e si trova $x = 7/2$ $y = ½$

**SOLUZIONE ALTERNATIVA**

Si usa la formula di cambiamento delle coordinate. Il vettore (4,3) ha coordinate 4 e 3 rispetto alla base canonica, e la matrice di cambiamento base è $M(X_1, X_2)^{-1}$ . Si ha dunque

$M(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi $M(X_1, X_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M(X_1, X_2)^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

## 4. Sottospazi associati a matrici e forma implicita

### 4.1

Si consideri il sottospazio $L$ di $\boldsymbol{R}^3$ generato da $X_1 = (1,2,3)$ e $X_2 = (0,1,1)$. Se ne trovi una forma implicita, cioè un sistema di equazioni omogenee in $x$ , $y$ , $z$ tale che lo spazio della sua soluzione coincida con $L$ .

**SOLUZIONE**

Posto $X = ( x , y , z )$, si tratta di imporre che le matrici $M = M(X_1 , X_2 )$ e $M' = M(X_1 , X_2 , X)$ abbiano lo stesso rango. Si ha

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \end{pmatrix}$$

Con il consueto procedimento si trasforma $M'$ in matrice a scala, ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & -x-y+z \end{pmatrix}$$

da cui si vede immediatamente che il rango di $M$ vale 2, e il rango di $M'$ ha lo stesso valore 2 se e solo se

$$-x-y+z = 0$$

che è il richiesto sistema di equazioni.

### 4.2

Si consideri il sottospazio $L$ di $\boldsymbol{R}^3$ formato dai vettori ( $x$ , $y$ , $z$ ) che soddisfano all’equazione

$$x-2y+z = 0$$

Si determinino una forma esplicita e una base di $L$ .

**SOLUZIONE**

Il primo passo consiste nel trovare le soluzioni dell’equazione proposta. Si ha:

$x = 2y - z$

con le variabili $y$ e $z$ indipendenti.

In forma vettoriale si ha la soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi una base è formata dai vettori (2, 1, 0) e (–1,0,1)

### 4.3

Si consideri il sottospazio $L$ di $\boldsymbol{R}^4$ generato da $X_1 = (1,2,3,4)$ , $X_2 = (0,1,1,1)$ e $X_3 = (1,3,4,5)$ .

1. Se ne trovi una forma implicita, cioè un sistema omogeneo il cui spazio delle soluzioni coincida con $L$ .
2. Si determini la dimensione di $L$ e se ne trovi una base.
3. Si esegua il procedimento inverso, partendo dal sistema trovato e costruendo una rappresentazione esplicita di $L$.

**SOLUZIONE**

Posto $X = (x , y , z , t)$, si riduce la matrice

$$M(X_1, X_2, X_3, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \\ 4 & 1 & 5 & t \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x-y+z \\ 0 & 0 & 0 & -2x-y+t \end{pmatrix}.$$

Quindi:

1. Il sistema è
$$\begin{cases} -x-y+z=0 \\ -2x-y+t=0 \end{cases}$$
2. La dimensione di $L$ è 2, e una base è la coppia $(X_1 , X_2)$
3. Risolvendo il sistema trovato nel punto 1. , si ha
$$\begin{cases} z = x+y \\ t = 2x+y \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo un'altra base di $L$: $Y_1 = (1,0,1,2)$, $Y_2 = (0,1,1,1)$.

**4.4**

Sono dati i seguenti vettori di $\boldsymbol{R}^3$ :
$X_1 =(1, 2, 3)$, $X_2 =(-1, 1, 1)$, $X_3 =(0, 3, k)$, $X_4 =(-1, k , 5)$, $X_5 =(-1, 10, 13)$.
Trovare una base di $L(X_1 ,\ldots, X_5 )$, al variare di $k$.

**SOLUZIONE**

Per $k\neq 4$ , $X_1$, $X_2$, $X_3$ sono linearmente indipendenti in quanto $D(M(X_1, X_2, X_3)) \neq 0$: quindi $L = \boldsymbol{R}^3$ e i tre vettori si possono scegliere come base. Per $k$=4 una base è $(X_1,X_2)$: infatti

$r(M(X_1, X_2, X_4, X_5)) = 2$ e $X_1, X_2$ sono linearmente indipendenti in quanto uno non è multiplo dell'altro.

 