Esercizi svolti

1. Matrici e operazioni fra matrici

1.1

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

risolvere, se possibile, l'equazione $xA + B = \mathrm{O}$, essendo x un'incognita reale

SOLUZIONE

Osservazione iniziale: qualunque valore assuma il numero reale x, l'espressione $xA + B$ rappresenta una matrice a 2 righe e 3 colonne; quindi perchè l'equazione da risolvere abbia senso, il secondo membro deve essere interpretato non come il numero 0, ma come l'elemento neutro con lo stesso numero di righe e colonne, cioè

$$\mathrm{O}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ciò premesso, l'equazione da risolvere è

$$x\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando proprietà varie delle operazioni fra matrici:

$$x\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & -15 & -6 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} -x & 2x & -x \\ -3x & 5x & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & -15 & -6 \end{pmatrix}$$

Due matrici sono uguali se e solo se coincidono tutti gli elementi con indici uguali, quindi l'ultima equazione scritta si traduce nelle seguenti 6 equazioni numeriche:

$-x = 3$

$2x = -6$

$-x = 3$

$-3x = 9$

$5x = -15$

$2x = -6$

In questo caso le 6 equazioni sono soddisfatte se e solo se $x = -3$. Quindi il problema posto ha una e una sola soluzione.

1.2

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

risolvere, se possibile, l'equazione $x^2A + B = 0$ per x reale

SOLUZIONE

Ripetendo quanto fatto nell'esercizio precedente, si giunge a $x^2 = -3$. Questo è impossibile, qualunque sia x reale. Quindi il problema non ha soluzioni.

1.3

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

risolvere, se possibile, l'equazione $x^2A + B = 0$ per x complesso

SOLUZIONE

Ripetendo quanto fatto per l'esercizio precedente, si giunge a $x^2 = -3$. Si trovano quindi le due soluzioni complesse $x = \pm\sqrt{3}i$

1.4

Calcolare il seguente prodotto di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(Ricordare che il simbolo "*t*" posto a sinistra in alto di una matrice indica la trasposizione)

SOLUZIONE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

1.5

Calcolare il seguente prodotto di matrici, senza fare calcoli ma usando l'esercizio precedente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE

Trasponendo entrambi i membri della relazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

trovata nell'esercizio precedente e usando proprietà della trasposizione si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$$

1.6

Trovare, se possibile, una matrice quadrata 2 x 2 X non nulla tale che valga $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$

SOLUZIONE

Posto $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sviluppando il calcolo del prodotto di matrici si trova $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi :

$a = 0$

$b = 0$

Quindi il problema ha infinite soluzioni: X può essere qualsiasi matrice con la prima riga nulla, ad esempio

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

1.7

Trovare, se possibile, una matrice quadrata 2 x 2 X tale che valga $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = I_2$

SOLUZIONE

Posto $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sviluppando il calcolo del prodotto di matrici si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$$

Ricordando che $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ed eguagliando gli elementi di uguale posizione, si trovano le equazioni

$a + 2c = 1$

$b+2d = 0$

$2a + c = 0$

$2b + d = 1$

La prima e la terza costituiscono un sistema lineare nelle incognite *a* e *c*, che può essere risolto, ad esempio, per sostituzione, trovando

a = -1/3

c = 2/3

Analogamente dalla seconda e quarta si ottiene

b = 2/3

d = -1/3

Dunque il problema ha l'unica soluzione $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

1.8

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare la matrice A^3 -2 A^2+ A. Tenuto conto del risultato, trovare una matrice *B* non nulla tale che $AB = BA = 0$

SOLUZIONE

Eseguendo il calcolo si trova $A^3 -2 A^2 + A = AAA - 2 AA + A = 0$

Per la seconda parte, si osserva che, per la proprietà distributiva,

$A (A^2 -2 A + I) = A^3 -2 A^2 + A = 0$

$(A^2 -2 A + I) A = A^3 -2 A^2 + A = 0$

Quindi una possibile risposta è $B = A^2 -2 A + I$

2. Operazioni elementari e riduzione

2.1

Trovare la matrice srn (a scala ridotta normalizzata) equivalente per righe alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare il rango di *A*.

SOLUZIONE

Consiste di tre passi:

1. Trasformazione di *A* in una matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-\frac{1}{3}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-\frac{1}{6}(2)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice ottenuta è a scala, con pivots 3, 2, 3/2, e si può già concludere che il rango è 3

2. Trasformazione in matrice a scala normalizzata moltiplicando ogni riga non nulla per l'inverso del suo pivot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}(1),\frac{1}{2}(2),\frac{2}{3}(3),} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

3. Azzeramento di tutti gli elementi non nulli sopra i pivots, che ora valgono 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-\frac{3}{2}(2)]{(1)+\frac{1}{3}(2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-\frac{1}{2}(3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

2.2

Trovare, al variare del parametro reale h, il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 4 & h & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE

Trasformiamo A in forma a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 4 & h & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-4(1)} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & -3h & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Attenzione ad un errore tipico: la matrice ottenuta sembra “tipograficamente” a scala, ma questa conclusione è sbagliata se h vale 0 !

Occorre separare due casi, ed esaminarli individualmente:

1. $h \neq 0$: la matrice ottenuta è a scala, ha 3 pivots, il rango è 3
2. $h = 0$: la matrice ottenuta è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, e non è a scala; occorre un’ulteriore

   trasformazione:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+5(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice ottenuta è a scala, ha 2 pivots, il rango è 2

3. Sistemi lineari

3.1

Risolvere il sistema lineare a 3 incognite

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

stabilendo quante sono le soluzioni e quali variabili si sono prese come indipendenti e quali come dipendenti

SOLUZIONE

La matrice M del sistema è

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Il metodo generale di soluzione consiste nel trovarne la forma *srn* M'. Si trova

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27/11 \\ 0 & 1 & 0 & -13/11 \end{array}\right)$$

dove le incognite che hanno per coefficienti i pivots sono x e y.

Il sistema con la matrice M', equivalente a quello di partenza, risulta

$$\begin{cases} x = \dfrac{27}{11} \\ y = -\dfrac{13}{11} \end{cases}$$

Tale sistema è già risolto rispetto alle incognite relative ai pivots, che sono quindi dipendenti. L’unica incognita indipendente è z . Il vettore delle soluzioni è

$$X = \begin{pmatrix} \frac{27}{11} \\ -\frac{13}{11} \\ z \end{pmatrix}$$

dove z può assumere qualunque valore.

Le soluzioni sono quindi ∞^1.

Si noti che se una variabile non compare esplicitamente, tale variabile è necessariamente indipendente

3.2

Risolvere il seguente sistema lineare a 4 incognite, stabilendo quante sono le soluzioni e quali variabili si sono prese come indipendenti e quali come dipendenti

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE

La matrice M del sistema è

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

e la sua forma *srn* è

$$M' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

e quindi le risolventi sono

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = -\frac{1}{2} - z \end{cases}$$

Le variabili indipendenti sono dunque *t* e *z*, e le dipendenti *x* e *y*. Le soluzioni sono ∞^2. Tali soluzioni si possono rappresentare in forma vettoriale come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al variare di *z* e *t* in $\mathbf{R}^2$

3.3

Aggiungere un'equazione qualsiasi al sistema lineare dell'esercizio precedente, in modo da ridurre il numero di variabili indipendenti a 1.

SOLUZIONE

Basta aggiungere, ad esempio, $t = 0$. (Verificarlo risolvendo il nuovo sistema)

3.4

Aggiungere un'equazione qualsiasi al sistema lineare degli esercizi precedenti, in modo da mantenere il numero di variabili indipendenti a 2.

SOLUZIONE

Basta aggiungere un'equazione tale che il nuovo e il vecchio sistema siano equivalenti. Alcune possibili scelte, in ordine decrescente di banalità:

1. $0 = 0$
2. $x + y + z + t = 1$ (un'equazione esistente ripetuta)
3. $2x + 2t = 3$ (ottenuta sommando le due equazioni esistenti)

………………

3.5

Discutere la risolubilità e unicità della soluzione del sistema lineare $A_h X = B$ con
$$A_h = \begin{pmatrix} h & i & 2 \\ 2 & 2i & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
con h complesso

SOLUZIONE

La matrice del sistema è
$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} h & i & 2 & 1 \\ 2 & 2i & 4 & i \end{array}\right)$$
Seguendo il metodo generale per trovarne la forma *srn*, si dovrebbero distinguere due casi, a seconda che il parametro h sia o no nullo (infatti nel primo caso si dovrebbero scambiare le due righe). Ma si può rimandare questa biforcazione eseguendo comunque lo scambio, in modo da avere nella posizione $[M]_{1,1}$ un elemento sicuramente non nullo. Si parte dunque da
$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2i & 4 & i \\ h & i & 2 & 1 \end{array}\right)$$
A questo punto la trasformazione (2) - (h/2)1 produce una matrice a scala. Si noti che questo vale anche se $h = 0$, solo che la trasformazione diventa banale. Si ottiene così
$$M'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2i & 4 & i \\ h & (1-h)i & 2(1-h) & 1 - ih/2 \end{array}\right)$$
A questo punto occorre distinguere due casi

1. $h \neq 1$: la matrice A e la matrice M hanno entrambe rango 2, quindi per il Teorema di Rouchè-Capelli il sistema è risolubile con 3-2 = 1 incognite libere (∞^1 soluzioni)
2. $h = 1$: la matrice A ha rango 1 e la matrice M ha rango 2, quindi per il Teorema di Rouchè-Capelli il sistema non è risolubile

Si noti che il sistema proposto non ha mai soluzione unica.

4. Matrici invertibili

4.1

Trovare l'inversa, se esiste, della seguente matrice, verificando il risultato:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE

Seguendo il metodo generale, si considera la matrice 3 x 6 le cui prime colonne sono quelle di A e le rimanenti quelle di I_3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la si trasforma a forma *srn* , ottenendo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nelle prime 3 colonne è contenuta la matrice I_3, dunque A è invertibile, e l'inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Per verificare il risultato basta eseguire il prodotto AA^{-1}, che deve essere I.

4.2

Sia A una matrice quadrata tale che $A^3 = I$. Provare che A è invertibile, trovarne l'inversa, e trovare l'inversa di A^7

SOLUZIONE

Poiché si ha $A\,A^2 = A^3 = I$, A è invertibile e la sua inversa è visibilmente $A^{-1} = A^2$.

Usando proprietà algebriche si ha $(A^7)^{-1} = (A^{-1})^7 = (A^2)^7 = A^{14} = (A^3)^4 A^2 = A^2$.

Si noti che l'esercizio è stato svolto senza conoscere la matrice A e neppure il suo ordine.

5. Determinanti

5.1

Usando la definizione di determinante, calcolare

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE

Per lo sviluppo scegliamo le righe che contengono più zeri. Si trova

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$-2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + 3(4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}) =$$

$$-2(-3) + 3(-4) = 6 - 12 = -6$$

5.2

Calcolare più rapidamente lo stesso determinante dell'esercizio precedente

SOLUZIONE

Cominciamo a trasporre la matrice (operazione che non altera il determinante)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nella prima colonna ci sono due zeri. Usiamo una OE per farne comparire un terzo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+3(2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto sviluppiamo lungo la prima colonna:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

5.3

Trovare l'inversa, se esiste, della seguente matrice, usando la formula dell'inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE

Anzitutto $D(A)$ = -2, quindi la matrice è invertibile. La formula dell'inversa fornisce:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix}2&0\\4&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2&-1\\4&2\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}2&-1\\2&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&3&-1\\2&-2&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

5.4

Si risolva il seguente sistema lineare, usando la regola di Cramer e i determinanti:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Anzitutto si calcola il determinante del sistema e si trova il valore 2. Usando la regola di sostituire le colonne della matrice con quella dei termini noti si ha

$$x=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}=0$$

$$y=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$$

5.5

Si studi il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali a e b :

$$\begin{cases} x+(2-a)y+z=b \\ x+ay+2z=-b \\ x+ay+z=3 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Il determinante della matrice dei coefficienti è 6 – 6a (verificare). Quindi per il Teorema di Cramer il sistema è determinato per $a \neq 1$.

Per a = 1, il sistema diventa

$$\begin{cases} x+y+z=b \\ x+y+2z=-b \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Per b $\neq 3$ il sistema è impossibile. Per b = 3 il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y+2z=-3 \end{cases}$$

che ha risolventi

$$\begin{cases} y=9-x \\ z=-6 \end{cases}$$

Quindi in questo caso il sistema è indeterminato con ∞^{1} soluzioni.

5.6

Discutere al variare di k reale la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x-y+z=k \\ 2x+z=-1 \\ kx+y-z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

determinandone la soluzione o le equazioni risolventi nei casi in cui esso è determinato o indeterminato

SOLUZIONE

La matrice associata

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & k \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

è quadrata di ordine 4 e il suo determinante si annulla per k = -1 e k = -2. Quindi, esclusi tali valori, il rango di M vale 4, mentre il rango della matrice dei coefficienti non può superare il numero delle incognite (3). Quindi il sistema può ammettere soluzioni solo per k = -1 e k = -2. Si devono quindi considerare 2 casi:

- k=-1

  La matrice diventa $M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  Applicando il metodo di riduzione si trova che tale sistema non ammette soluzioni.

- k=-2

La matrice diventa $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Applicando il metodo di riduzione si trova l'unica soluzione (1,0,-3).