Esercizi svolti

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$
a) Verificare che la funzione $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$ è una primitiva di $f(x)$ sull'intervallo $(-2, 2)$.
b) Verificare che la funzione $G(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ è la primitiva di $f(x)$ sull'intervallo $(-2, 2)$ che passa per P$= (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. Verificare che le funzioni
$$F(x) = \sin^2 x + 7 \quad \text{e} \quad G(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - 11$$
sono due primitive di una stessa funzione $f(x)$ su $\mathbb{R}$; trovare $f(x)$ e dire di quale costante differiscono $F(x)$ e $G(x)$.

3. Usando le tabelle degli integrali elementari, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

a) $\displaystyle\int \sqrt{2x+5}\ \mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x$ *d)* $\displaystyle\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\ \mathrm{d}x$ *f)* $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^{2/3}}\ \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int xe^{x^2}\ \mathrm{d}x$ *h)* $\displaystyle\int \tan x\ \mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 2x}\ \mathrm{d}x$ *j)* $\displaystyle\int 7x\cos(3x^2-5)\ \mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\sin x}\ \mathrm{d}x$ *ℓ)* $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(3x^2+5)}\ \mathrm{d}x$

4. Calcolare per parti i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int x\sin x\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 2xe^{-x}\ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \log(1+x)\ \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 2x\log(x-5)\ \mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int x\log^2(5x)\ \mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int (x+1)^2\cos x\ \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int 2x\arctan x\ \mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int e^x\sin x\ \mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$

5. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali:

$a)\ \displaystyle\int \frac{2x^2-3x+7}{x-5}\ \mathrm{d}x$ $\qquad b)\ \displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\ \mathrm{d}x$

$c)\ \displaystyle\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x$ $\qquad d)\ \displaystyle\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x$

$e)\ \displaystyle\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$ $\qquad f)\ \displaystyle\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\ \mathrm{d}x$

6. Calcolare i seguenti integrali, usando le opportune sostituzioni:

$a)\ \displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x$ $\qquad b)\ \displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ \mathrm{d}x$

$c)\ \displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x$ $\qquad d)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x$

$e)\ \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$ $\qquad f)\ \displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

$g)\ \displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$ $\qquad h)\ \displaystyle\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x$

$i)\ \displaystyle\int \frac{\cos x-3}{\sin^2 x-\cos^3 x+1}\sin x\ dx$ $\qquad j)\ \displaystyle\int \frac{1}{4\sin x+3\cos x}\ \mathrm{d}x$

7. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$a)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ \mathrm{d}x$ $\qquad b)\ \displaystyle\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ dx$

$c)\ \displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\ \mathrm{d}t$ $\qquad d)\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1|\arctan x\ \mathrm{d}x$

8. Calcolare le seguenti aree:

a) Area delimitata dall'asse della x, per $x \in [1,4]$, e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,.$$

b) Area della regione piana R compresa tra l'asse x e il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{6} & \text{se } 0 \le x < \pi\,, \\ \sin x & \text{se } \pi \le x \le 2\pi\,. \end{cases}$$

c) Area della regione R del piano xy compresa tra la curva di equazione $y = -e^x$ e la retta passante per i punti $A = (1, -e)$ e $B = (0, -1)$.

d) Area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)\log(x^2+4)$$

e l'asse delle x, per $x \in [0, 1]$.

e) Area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

e l'asse delle x, per $x \in \left[\log \frac{1}{\sqrt{3}}, \log\sqrt{3}\right]$.

9. Sia
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \le x < 1\,, \\ 16 - x^2 & \text{se } 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

a) Calcolare la media integrale μ di f sull'intervallo $[-1, 3]$.

b) Dire se esiste un punto $c \in [-1, 3]$ per cui $f(c) = \mu$.

10. Data la funzione
$$h(x) = x\log(x^2+1)$$

a) trovare tutte le primitive di h;

b) trovare la primitiva di $h(x)$ che passa per $P = (1, \log 2)$.

11. Trovare la primitiva della funzione

$$f(x) = x\sin x + \cos^2 x$$

che si annulla per $x = \frac{\pi}{2}$.

12. Sia
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x < 1\,, \\ \dfrac{1}{4+x^2} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

Determinare la primitiva generalizzata di f che si annulla per $x = 0$.

13. Usando la definizione, calcolare i seguenti integrali impropri:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^3\left(8+x^4\right)^{-5/3} + 2xe^{-x}\right)\, dx$

d) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\, dx$

14. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\, dx \ .$$

15. Calcolare

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n}\, dx$$

per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui l'integrale converge.

16. a) Determinare tutti i valori di a, $b \in \mathbb{R}$ per i quali converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}}\, dx \ .$$

b) Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}\, dx$.

17. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-2x-3| - x^2 - 2x - 3}{x^\alpha}\, dx$

b) $\displaystyle\int_4^{5} \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\, dx$

18. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale improprio e calcolarlo per $\alpha = 0$:

$$\int_2^3 \frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} \, \mathrm{d}x \; .$$

19. a) Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \, \mathrm{d}x \; .$$

b) Calcolare l'integrale precedente per $a = 6$.

20. Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}x \; .$$

21. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} \, \mathrm{d}x$

22. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2 \log(1+\sqrt[3]{x})} \, ,$$

a) studiarne il comportamento nell'origine e determinarne la parte principale.

b) Studiare la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Svolgimento

1. a) Per provare che $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$ è una primitiva di $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ sull'intervallo $(-2,2)$ è sufficiente verificare che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in (-2,2)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + 2\,\frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{2\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2+4}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = f(x). \end{aligned}$$

   b) Sicuramente $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$, in quanto differisce da $F(x)$ solo per la costante $-\frac{\pi}{3}$. Verifichiamo che $G(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$G(1) = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} + 2\arcsin\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\,\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Le funzioni $F(x)$ e $G(x)$ sono entrambe derivabili su $\mathbb{R}$; esse sono entrambe primitive di una stessa funzione $f(x)$ se si ha $F'(x) = G'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate:

$$F'(x) = 2\sin x\cos x = \sin(2x) \qquad G'(x) = -\frac{1}{2}\,(-2)\sin(2x) = \sin(2x).$$

   Dunque $F'(x) = G'(x) = f(x) = \sin(2x)$.

   Essendo due primitive della stessa funzione sullo stesso intervallo, la loro differenza deve essere costante; risulta

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \sin^2 x + 7 + \frac{1}{2}\cos(2x) + 11 \\ &= \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + 18 = 18 + \frac{1}{2} = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

3. Si ha

   a)
$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+5}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 2(2x+5)^{1/2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+5)^{3/2}}{3/2} + c \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(2x+5)^3} + c \end{aligned}$$

   b)
$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+5)^{-3/2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-1/2}}{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c$$

c) $$\int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{4}\int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} + c$$

d) $$\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x \ = 3\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\ \mathrm{d}x \ = 3\arctan(e^x) + c$$

e) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\log x)^2}}\ \mathrm{d}x \ = \arcsin(\log x) + c$$

f) $$\int \frac{1}{x(\log x)^{2/3}}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{1}{x}(\log x)^{-2/3}\ \mathrm{d}x \ = \frac{(\log x)^{1/3}}{1/3} + c = 3\sqrt[3]{\log x} + c$$

g) $$\int xe^{x^2}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

h) $$\int \tan x\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x \ = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x \ = -\log|\cos x| + c$$

i) $$\int \frac{1}{\sin 2x}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{1}{2\sin x\cos x}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\tan x}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}\log|\tan x| + c$$

j) $$\int 7x\cos(3x^2-5)\ \mathrm{d}x \ = \frac{7}{6}\int 6x\cos(3x^2-5)\ \mathrm{d}x \ = \frac{7}{6}\sin(3x^2-5) + c$$

k) $$\int \cos x\sqrt{\sin x}\ \mathrm{d}x \ = \int \cos x(\sin x)^{1/2}\ \mathrm{d}x \ = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + c$$

ℓ) $$\int \frac{x}{\cos^2(3x^2+5)}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{\cos^2(3x^2+5)}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{6}\tan(3x^2+5) + c$$

4. Ricordiamo la regola di integrazione per parti:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x \ = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

a) Scegliamo

$$\begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\int x \sin x \; \mathrm{d}x \; = -x\cos x - \int (-\cos x) \; \mathrm{d}x \; = -x\cos x + \sin x + c.$$

b) Scegliamo

$$\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ g(x) = x \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = 1 \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} 2\int xe^{-x} \; \mathrm{d}x &= 2\left(-x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) \; \mathrm{d}x \right) \\ &= 2(-x \cdot e^{-x} - e^{-x}) + c = -2e^{-x}(x+1) + c. \end{aligned}$$

c) In questo caso conviene vedere la funzione integranda $\log(1+x)$ come prodotto della funzione costante 1 per la funzione $\log(1+x)$ e scegliere

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \log(1+x) \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \log(1+x) \; \mathrm{d}x \; = x\log(1+x) - \int \frac{x}{1+x} \; \mathrm{d}x \; .$$

Per calcolare l'ultimo integrale, conviene prima eseguire un "trucco algebrico", e poi sfruttare la linearità dell'integrale; nel prossimo esercizio vedremo un procedimento più completo che tratta l'integrazione delle funzioni razionali. Per ora, scriviamo:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x};$$

dunque

$$\int \frac{x}{1+x} \; \mathrm{d}x \; = \int \; \mathrm{d}x \; - \int \frac{1}{1+x} \; \mathrm{d}x \; = x - \log|1+x| + c.$$

Tornando all'integrale di partenza, si ha:

$$\int \log(1+x) \; \mathrm{d}x \; = x\log(1+x) - x + \log(1+x) + c.$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione integranda è definita solo per $x > -1$.

d) Risulta

$$\int 2x \log(x-5)\ \mathrm{d}x\ = x^2 \log(x-5) - \int \frac{x^2}{x-5}\ \mathrm{d}x$$

Anche in questo caso, manipoliamo l'ultima funzione razionale, effettuando la divisione tra il monomio x^2 e il polinomio $x-5$; si ha

$$\frac{x^2}{x-5} = x + 5 + \frac{25}{x-5}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int 2x \log(x-5)\ \mathrm{d}x &= x^2 \log(x-5) - \int \left(x + 5 + \frac{25}{x-5} \right)\ \mathrm{d}x \\ &= x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log|x-5| + c \end{aligned}$$

La funzione integranda è definita solo per $x > 5$; pertanto si avrà $|x-5| = x-5$. Dunque

$$\int 2x \log(x-5)\ \mathrm{d}x\ = x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log(x-5) + c.$$

e) Risulta

$$\begin{aligned} \int x \log^2(5x)\ \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \int \frac{x^2}{2} 2 \log(5x) \frac{5}{5x}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \int x \log(5x)\,. \end{aligned}$$

Riapplicando nuovamente la formula di integrazione per parti all'ultimo integrale, ricaviamo

$$\begin{aligned} \int x \log^2(5x)\ \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \left(\frac{x^2}{2} \log(5x) - \frac{1}{2} \int x\ \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \frac{x^2}{2} \log(5x) + \frac{x^2}{4} + c\,. \end{aligned}$$

f) Si ha

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 \cos x\ \mathrm{d}x &= (x+1)^2 \sin x - \int 2(x+1) \sin x\ \mathrm{d}x \\ &= (x+1)^2 \sin x + 2 \left[(x+1) \cos x - \int \cos x\ \mathrm{d}x \right] \\ &= (x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x - 2 \sin x + c\,. \end{aligned}$$

g) Si ha

$$\begin{aligned}\int 2x\arctan x \ \mathrm{d}x &= x^2\arctan x - \int x^2\frac{1}{x^2+1} \ \mathrm{d}x\\ &= x^2\arctan x - \int \frac{x^2+1\ -1}{x^2+1} \ \mathrm{d}x\\ &= x^2\arctan x - \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) \ \mathrm{d}x\\ &= x^2\arctan x - x + \arctan x + c\end{aligned}$$

h) Si ha

$$\begin{aligned}\int e^x\sin x \ \mathrm{d}x &= e^x\sin x - \int e^x\cos x \ \mathrm{d}x\\ &= e^x\sin x - \left(e^x\cos x + \int e^x\sin x \ \mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Dunque

$$2\int e^x\sin x \ \mathrm{d}x \ = e^x\sin x - e^x\cos x$$

da cui

$$\int e^x\sin x \ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + c.$$

i) Risulta

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} - \int x\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

Dunque

$$2\int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

da cui

$$\int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$

Lo stesso integrale può essere risolto per sostituzione (si veda l'Esercizio 6).

5. a) Procediamo dapprima con la divisione del polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore e troviamo

$$\frac{2x^2-3x+7}{x-5} = 2x+7+\frac{42}{x-5}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-3x+7}{x-5}\ \mathrm{d}x &= \int \left(2x+7+\frac{42}{x-5}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int (2x+7)\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{42}{x-5}\ \mathrm{d}x \\
&= x^2+7x+42\log|x-5|+c.
\end{aligned}$$

b) Poiché $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} &= \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-4)}{(x-4)(x-2)} \\
&= \frac{(A+B)x-2A-4B}{(x-4)(x-2)}.
\end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-4B=-4 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} A=4 \\ B=-1 \end{cases}.$$

In alternativa, per calcolare A e B, dall'uguaglianza $3x-4=A(x-2)+B(x-4)$, ponendo dapprima $x=2$ si ricava $B=-1$ e ponendo $x=4$, si ottiene $A=4$. In ogni caso, si ha

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{4}{x-4}-\frac{1}{x-2},$$

dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\ \mathrm{d}x &= \int \left[\frac{4}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right]\ \mathrm{d}x \\
&= 4\log|x-4|-\log|x-2|+c.
\end{aligned}$$

c) Ricordando che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ e usando il metodo di decomposizione in fratti semplici, possiamo scomporre la frazione da integrare come

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x^3-1} &= \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\
&= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.
\end{aligned}$$

Uguagliando i numeratori della frazione iniziale e finale, si trova il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B+C &= 3 \\ A-C &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{cases} .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x . \end{aligned}$$

Per risolvere l'ultimo integrale, usiamo il metodo di "completamento dei quadrati", allo scopo di ottenere il denominatore nella forma $k[1+(ax+b)^2]$ (dove k, a, b sono costanti opportune da trovare):

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right].$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

d) Il polinomio x^3+2x^2+x+2 ammette la radice $x=-2$; dunque è divisibile per $x+2$. Effettuando i calcoli si trova $x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1)$. Dunque

$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\begin{aligned} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 9 \\ A+2C &= 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= -2 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \end{cases}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1} \right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\log|x+2| + \log(x^2+1) + 5\arctan x + c \\
&= \log \frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x + c.
\end{aligned}$$

e) Poiché il grado del polinomio al numeratore è superiore a quello del denominatore, occorre preliminarmente procedere alla divisione dei due polinomi. Si ottiene

$$\frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1} = x^3-3x^2+x-3+\frac{2x}{x^2-1}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^3-3x^2+x-3\right)\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2-1| + c.
\end{aligned}$$

f) Effettuando la necessaria divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore, si ottiene

$$\frac{x^5-x+1}{x^4+x^2} = x - \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x - \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2} \right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\begin{cases} A &= & 1 \\ B &= & -1 \\ C &= & 0 \\ D &= & 1 \end{cases} .$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + c. \end{aligned}$$

6. a) L'integrale può essere trasformato nell'integrale di una funzione razionale effettuando la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{t}{t^2 - 3t + 2} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2 - 3t + 2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t-2)} \, \mathrm{d}t \, . \end{aligned}$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale il cui denominatore è decomposto in fattori irriducibili. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t-2)}{(t-1)(t-2)}.$$

Ponendo dapprima $t = 2$ e successivamente $t = 1$, nell'uguaglianza

$$1 = A(t-1) + B(t-2),$$

si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} \, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) \, \mathrm{d}t \\ &= \log|t-2| - \log|t-1| + c \\ &= \log|e^x - 2| - \log|e^x - 1| + c. \end{aligned}$$

b) Risulta

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2} \, \mathrm{d}x \, .$$

Effettuando, come sopra, la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t} + 2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1 + 2t}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)^2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)}.$$

Ponendo $t = 0$ e $t = -1$ nell'uguaglianza $t - 1 = A(t+1) + Bt$, si ottiene $A = -1$ e $B = 2$. Dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t = -\log|t| + 2\log|t+1| + c \\ &= -\log|e^x| + 2\log|e^x + 1| + c = \log\left(e^x + 1\right)^2 - x + c.\end{aligned}$$

c) L'integrale può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale operando la sostituzione $\sqrt{x-1} = t$, da cui $x = 1 + t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Pertanto

$$\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - 4}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^3 + t^2 + t}{t^2 - 4}\,\mathrm{d}t\,.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene

$$\frac{t^3 + t^2 + t}{t^2 - 4} = t + 1 + \frac{5t + 4}{t^2 - 4}.$$

Dunque:

$$\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5}\,\mathrm{d}x = 2\int \left(t + 1 + \frac{5t+4}{(t-2)(t+2)}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{5t+4}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t-2)}{t^2 - 4}.$$

Ponendo $t = 2$ e $t = -2$ nell'uguaglianza $5t+4 = A(t+2)+B(t-2)$, si ottiene $A = \frac{7}{2}$ e $B = \frac{3}{2}$. Dunque :

$$\begin{aligned}\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5}\,\mathrm{d}x &= 2\int (t+1)\,\mathrm{d}t + 2\int \left(\frac{7}{2}\,\frac{1}{t-2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= t^2 + 2t + 7\log|t-2| + 3\log|t+2| + c \\ &= x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 7\log|\sqrt{x-1} - 2| + \\ &\qquad\qquad +3\log|\sqrt{x-1} + 2| + c.\end{aligned}$$

d) Per risolvere l'integrale, allo scopo di "eliminare i radicali " si può effettuare la sostituzione $2x = t^6$, da cui $\mathrm{d}x = 3t^5\ \mathrm{d}t$; in tal modo si ha $\sqrt{2x} = t^3$ e $\sqrt[3]{2x} = t^2$. Dunque:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{3t^5}{t^3(t^2+1)}\ \mathrm{d}t = 3\int \frac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \\
&= 3\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\ \mathrm{d}t = 3t - 3\arctan t + c \\
&= 3\sqrt[6]{2x} - 3\arctan \sqrt[6]{2x} + c
\end{aligned}$$

e) L'integrale è già stato risolto precedentemente per parti; si può anche effettuare la sostituzione $x = \sin t$, da cui e $\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$. La funzione $x = \sin t$ non è iniettiva; pertanto, per poter effettuare la sostituzione inversa, dobbiamo restringerci a un opportuno intervallo di integrazione; conviene scegliere l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, in cui oltre a invertire la funzione $x = \sin t$, trovando $t = \arcsin x$, è anche possibile ricavare $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Dunque

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + c \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.
\end{aligned}$$

f) Conviene effettuare la sostituzione $x = \sinh t$, da cui si ricava $\mathrm{d}x = \cosh t\ \mathrm{d}t$; si ha inoltre $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$, tenendo conto che i due membri dell'ultima uguaglianza sono funzioni sempre positive. Dunque

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t = \int \frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}\ \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} + 2t\right) + c \\
&= \frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\sinh t\cosh t + \frac{1}{2}t + c \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{settsinh} x + c.
\end{aligned}$$

g) Conviene effettuare la sostituzione $x = \cosh t$, da cui si ricava $\mathrm{d}x = \sinh t\ \mathrm{d}t$. Ponendoci su un opportuno intervallo di integrazione, possiamo invertire la funzione $x = \cosh t$; conviene scegliere l'intervallo $[0, +\infty)$, in cui si trova $t = \log(x+\sqrt{x^2-1})$. Inoltre è anche possibile ricavare $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$. Dunque

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \int \sinh^2 t\ \mathrm{d}t = \int (\cosh^2 t - 1)\ \mathrm{d}t = \int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t - t.$$

Sfruttando il risultato appena trovato sopra

$$\int \cosh^2 t \;\, \mathrm{d}t \;\, = \frac{1}{2}\,\sinh t\cosh t + \frac{1}{2}\,t + c$$

si ha

$$\int \sqrt{x^2-1} \;\, \mathrm{d}x \;\, = \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\,\log(x+\sqrt{x^2-1}) + c.$$

h) Allo scopo di trasformare l'integrale in quello di una funzione razionale, possiamo usare la sostituzione $\tan x = t$, da cui $x = \arctan t$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Quindi

$$\int \frac{2}{(1+\tan x)^2} \;\, \mathrm{d}x \;\, = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,\frac{1}{1+t^2} \;\, \mathrm{d}t\ .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$A = 1\,, \qquad B = 1\,, \qquad C = -1\,, \qquad D = 0\,.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(1+\tan x)^2} \;\, \mathrm{d}x \quad &= \quad \int \frac{1}{1+t} \;\, \mathrm{d}t \; + \int \frac{1}{(1+t)^2} \;\, \mathrm{d}t \; - \int \frac{t}{1+t^2} \;\, \mathrm{d}t \\
&= \quad \log|1+t| - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c \\
&= \quad \log|1+\tan x| - \frac{1}{1+\tan x} - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x) + c.
\end{aligned}$$

i) Utilizziamo la sostituzione $\cos x = t$, da cui $\sin x\;\mathrm{d}x \; = \; \mathrm{d}t$. Pertanto

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1}\sin x \;\, \mathrm{d}x \;\, = \int \frac{t-3}{1-t^2-t^3+1} \;\, \mathrm{d}t \;\, = \int \frac{3-t}{t^3+t^2-2} \;\, \mathrm{d}t\ .$$

Il polinomio a denominatore ammette la radice $t = 1$ e si fattorizza in $t^3 + t^2 - 2 = (t-1)(t^2+2t+2)$. Ricorrendo alla decomposizione in fratti semplci, si trova

$$\frac{3-t}{(t-1)(t^2+2t+2)} = \frac{\frac{2}{5}}{t-1} + \frac{-\frac{2}{5}t - \frac{11}{5}}{t^2+2t+2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{3-t}{t^3+t^2-2} \;\, \mathrm{d}t \;\, &= \frac{1}{5}\int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+11}{t^2+2t+2}\right) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5}\left(2\log|t-1| - \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2} \;\, \mathrm{d}t \; - \int \frac{9}{1+(t+1)^2} \;\, \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{5}\log|t-1| - \frac{1}{5}\log(t^2+2t+2) - \frac{9}{5}\arctan(t+1) + c.
\end{aligned}$$

Infine

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{5}\log|\cos x - 1| + \\ -\frac{1}{5}\log(\cos^2 x + 2\cos x + 2) - \frac{9}{5}\arctan(\cos x + 1) + c.$$

j) L'integrale può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale mediante le formule di razionalizzazione delle funzioni trigonometriche, cioè operando la sostituzione $\tan\frac{x}{2} = t$, da cui $x = 2\arctan t$ e $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; si ha inoltre $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2}{8t + 3 - 3t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{(3t+1)(t-3)}\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{1}{(3t+1)(t-3)} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3) + B(3t+1)}{(3t+1)(t-3)}.$$

Ponendo $t = 3$ e $t = -\frac{1}{3}$ nell'uguaglianza $1 = A(t-3) + B(3t+1)$, si ottiene $A = -\frac{3}{10}$ e $B = \frac{1}{10}$ Dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\,\mathrm{d}x &= -2\int \left(-\frac{3}{10}\frac{1}{3t+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{t-3}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5}\log|3t+1| - \frac{1}{5}\log|t-3| + c \\ &= \frac{1}{5}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\tan\frac{x}{2} - 3}\right| + c.\end{aligned}$$

7. a) Per calcolare un integrale definito occorre dapprima calcolare una primitiva della funzione integranda. Cerchiamo dunque una primitiva della funzione razionale $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$. Usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici, ottenendo:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Ponendo $x = 2$ e $x = -2$ nell'uguaglianza $x - 1 = A(x+2) + B(x-2)$, si ottiene $a = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{3}{4}$. Dunque

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{1/4}{x-2} + \frac{3/4}{x+2} \right) \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{4} \log|x-2| + \frac{3}{4} \log|x+2| \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}\log 1 + \frac{3}{4}\log 3 - \frac{1}{4}\log 2 - \frac{3}{4}\log 2 \\
&= \frac{3}{4}\log 3 - \log 2.
\end{aligned}$$

b) Utilizziamo dapprima la sostituzione $2x + 1 = u$ e dunque $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, e in seguito applichiamo la formula di integrazione per parti; otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{\log u}{u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u}\log u - \int \frac{-1}{u^2} \, \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u}\log u - \frac{1}{u} \right) + c.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(2x+1)} \left[1 + \log(2x+1) \right] + c.$$

Dunque l'integrale cercato vale:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} \, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1 + \log(2x+1)}{2x+1} \right]_0^2 \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \log 5}{5} - 1 \right) = \frac{4 - \log 5}{10}.
\end{aligned}$$

c) Utilizziamo la sostituzione: $\sqrt{t} = y$, e dunque $t = y^2$ da cui $\mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y$. Allora:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{t} - 3}{2 - 3\sqrt{t} + t} \, \mathrm{d}t &= \int \frac{y-3}{2 - 3y + y^2} 2y \, \mathrm{d}y = 2 \int \frac{y^2 - 3y}{y^2 - 3y + 2} \, \mathrm{d}y \\
&= 2 \int \left(1 - \frac{2}{y^2 - 3y + 2} \right) \, dy \\
&= 2 \int \mathrm{d}y - 4 \int \frac{1}{(y-1)(y-2)} \, \mathrm{d}y .
\end{aligned}$$

Usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici:

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{A(y-2) + B(y-1)}{(y-1)(y-2)}$$

che porta a $A=-1$ e $B=1$. Dunque:

$$\begin{aligned} 2\int \mathrm{d}y \; - 4\int \frac{1}{(y-1)(y-2)}\,\mathrm{d}y &= 2y - 4\int\left(\frac{-1}{y-1}+\frac{1}{y-2}\right)\mathrm{d}y \\ &= 2y + 4\log|y-1| - 4\log|y-2| + c. \end{aligned}$$

Applicando ora la sostituzione inversa, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\,\mathrm{d}t &= 2\sqrt{t} + 4\log\left|\sqrt{t}-1\right| - 4\log\left|\sqrt{t}-2\right| + c \\ &= 2\sqrt{t} + 4\log\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}-2}\right| + c. \end{aligned}$$

Si può infine ricavare il valore dell'integrale definito

$$\begin{aligned} \int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\,\mathrm{d}t &= 2\sqrt{16} + 4\log\left|\frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-2}\right| - 2\sqrt{9} - 4\log\left|\frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}-2}\right| \\ &= 2 + 4\log 3 - 8\log 2. \end{aligned}$$

d) Dividiamo l'intervallo di integrazione $[0,\sqrt{3}]$ nei due sottointervalli $[0,1]$ e $[1,\sqrt{3}]$, in quanto la funzione $|x-1|$ assume in essi due espressioni diverse; si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1|\arctan x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4(1-x)\arctan x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{3}} 4(x-1)\arctan x\,\mathrm{d}x\,.$$

Possiamo ora utilizzare la formula di integrazione per parti per calcolare l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int (x-1)\arctan x\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\arctan x - \int\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio a denominatore nell'ultimo integrale non ha grado superiore a quello a numeratore, procediamo con la divisione del numeratore per il denominatore:

$$\begin{aligned} \int\frac{x^2-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(1-\frac{2x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \mathrm{d}x \; - \int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \; - \int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= x - \log(x^2+1) - \arctan x + c. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\int (x-1)\arctan x \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log(1+x^2) - \arctan x\right) + c.$$

Calcolando ora l'integrale definito, si ricava:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1|\arctan x \;\mathrm{d}x \;&= -4\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x + \right.\\ &\left. -\frac{1}{2}\left(x - \log(1+x^2) - \arctan x\right)\right]_0^1 + \\ &+4\;\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log(1+x^2) - \arctan x\right)\right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4(2-\sqrt{3})\,\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

8. a) Per $x \in [1,4]$, $f(x)$ è senz'altro positiva (perché somma di quantità positive). Dunque l'area A richiesta risulta essere:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 f(x)\;\mathrm{d}x \;= \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \;= \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} + x^{-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \log|x| + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{x} + \log|x| - \frac{1}{x}\right]_1^4 \\ &= 4 + \log 4 - \frac{1}{4} - 2 - \log 1 + 1 = \frac{11}{4} + \log 4. \end{aligned}$$

b) Tenendo conto che nell'intervallo $(0,\pi)$ la funzione $f(x)$ è positiva, mentre, tra π e 2π, $f(x)$ è negativa, l'area A della regione R è data da:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \frac{x^2+x}{6}\;\mathrm{d}x \;- \int_\pi^{2\pi} \sin x \;\mathrm{d}x \;= \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi - [-\cos x]_\pi^{2\pi} \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{2}\right] + [1+1] = \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^2}{12} + 2. \end{aligned}$$

c) Si osservi che i punti A e B appartengono alla curva di equazione $y = -e^x$. Dunque sono i punti di intersezione tra la curva e la retta passante per A e B. La retta r passante per i punti A$=(1,-e)$ e B$=(0,-1)$ ha equazione $y = (1-e)x - 1$. Notiamo inoltre che la funzione $f(x)$ è sempre negativa, e dunque la regione R è situata al di sotto dell'asse delle x; osserviamo infine che la corda AB sta al di sotto del grafico della funzione $f(x)$.

Pertanto l'area A richiesta sarà data da:

$$\begin{aligned} A &= -\left(\int_0^1 [(1-e)x-1]\ \mathrm{d}x\ - \int_0^1 (-e^x)\ \mathrm{d}x\ \right) \\ &= -\int_0^1 [(1-e)x-1+e^x]\ \mathrm{d}x\ = -\left[\frac{1-e}{2}\cdot x^2 - x + e^x\right]_0^1 = \frac{3-e}{2}. \end{aligned}$$

d) Studiamo il segno di f in $(0,1)$:

i) il fattore $(x-1)$ è negativo

ii) il fattore $\log(x^2+4)$ è positivo, perché $x^2+4>1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Dunque nell'intervallo $(0,1)$ la funzione $f(x)$ è negativa. Pertanto l'area richiesta è data da:

$$A = -\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\ = -\int_0^1 (x-1)\log(x^2+4)\ \mathrm{d}x\ .$$

Risolviamo l'integrale indefinito, utilizzando il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int (x-1)\log(x^2+4)\ \mathrm{d}x &= \frac{(x-1)^2}{2}\log(x^2+4) - \int \frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{(x-1)^2}{2}\log(x^2+4) - \int \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

Per risolvere il rimanente integrale, dividiamo il polinomio al numeratore per il denominatore, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x &= \int \left[(x-2) + \frac{-3x+8}{x^2+4}\right]\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x\ + 8\int \frac{1}{x^2+4}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}\log(x^2+4) + 4\arctan\frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} A &= -\left[\frac{(x-1)^2}{2}\log(x^2+4) - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{3}{2}\log(x^2+4) - 4\arctan\frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= -\left[-\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2}\log 5 - 4\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 4 - \frac{3}{2}\log 4\right] \\ &= 2\log 4 - \frac{3}{2}\log 5 + 4\arctan\frac{1}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

e) Studiamo dapprima il segno della funzione f. Poiché il denominatore è una quantità sempre positiva, è sufficiente studiare il segno del numeratore.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff e^x - e^{2x} > 0 \iff e^x(1-e^x) > 0 \iff 1 - e^x > 0 \\ &\iff e^x < 1 \iff x < 0. \end{aligned}$$

Dunque: $f(x) > 0$ per $x < 0$; $f(x) < 0$ per $x > 0$.
Consideriamo ora l'intervallo $\left(\log \frac{1}{\sqrt{3}}, \log\sqrt{3}\right) = \left(-\log\sqrt{3}, \log\sqrt{3}\right)$.

Per $x \in \left(-\log\sqrt{3}, 0\right)$ la funzione è positiva. Dunque l'area compresa tra il grafico di f e l'asse delle x è data da:

$$A_1 = \int_{-\log\sqrt{3}}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Invece, per $x \in \left(0, \log\sqrt{3}\right)$, la funzione è negativa, e l'area sarà data da:

$$A_2 = -\int_{0}^{\log\sqrt{3}} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Pertanto l'area richiesta sarà la somma delle due aree:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\log\sqrt{3}}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x\ - \int_{0}^{\log\sqrt{3}} f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int f(x)\ \mathrm{d}x &= \int \frac{e^x - e^{2x}}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\ \mathrm{d}x\ - \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x \\ &= \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right) + c. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora gli integrali definiti:

$$\begin{aligned} A_1 &= \arctan(1) - \frac{1}{2}\log(1+1) - \arctan e^{-\log\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\log\left(1+e^{-2\log\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3} \\ A_2 &= -\left[\arctan e^{\log\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log\left(1+e^{2\log\sqrt{3}}\right) - \arctan 1 + \frac{1}{2}\log 2\right] \\ &= -\arctan\sqrt{3} + \frac{1}{2}\log(1+3) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\log 2. \end{aligned}$$

Dunque l'area richiesta è:

$$A = \frac{1}{2}\left(\log 2 + \log\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}.$$

9. a) Per definizione di media integrale

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1}|x|\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{3}(16-x^2)\ \mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\int_{0}^{1} x\ \mathrm{d}x + \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_1^3\right) = 6 + \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

b) Poiché $f(x)$ non è continua sull'intervallo $[-1,3]$, non si può utilizzare il teorema della media integrale per affermare l'esistenza di un punto c con le caratteristiche richieste. Controlliamo pertanto direttamente se μ appartiene all'immagine di f. Si verifica facilmente che $\mathrm{Im}\,(f) = [0,1) \cup [7,15]$. Dunque $\mu \notin \mathrm{Im}(f)$ e non esiste nessun $c \in [-1,3]$ tale che $f(c) = \mu$.

10. a) Le primitive di $h(x) = x\log(x^2+1)$ si trovano risolvendo l'integrale indefinito $\int h(x)\ \mathrm{d}x$.

Per risolvere questo integrale, si può applicare la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Nel nostro caso scegliamo $f(x) = \log(x^2+1)$ e $g'(x) = x$. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}\int x\log(x^2+1)\ \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c.\end{aligned}$$

Dunque le primitive di h sono le funzioni:

$$F_c(x) = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Tra tutte le funzioni $F_c(x)$ si deve trovare quella per cui $F_c(1) = \log 2$.

$$F_c(1) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 + c = \log 2 - \frac{1}{2} + c.$$

Dunque $F_c(1) = \log 2$ se e solo se $c = \frac{1}{2}$. Pertanto la primitiva cercata è la funzione

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}.$$

11. Possiamo procedere come sopra, trovando tutte le primitive di $f(x)$ e poi quella che passa per P= $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

    In alternativa, possiamo sfruttare il teorema fondamentale del calcolo integrale; la primitiva cercata è la funzione integrale

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

    Scegliamo la seconda strada. Risolviamo prima l'integrale indefinito

$$\int f(t)\ \mathrm{d}t\ = \int \left(t \sin t + \cos^2 t\right)\ \mathrm{d}t\ .$$

    Incominciamo con il separare l'integrale nella somma di due integrali, data la linearità dell'operazione di integrazione. Eseguiamo il primo integrale per parti, prendendo il fattore $\sin t$ come fattore differenziale:

$$\begin{aligned} \int t \sin t\ \mathrm{d}t &= t(-\cos t) - \int (-\cos t) \cdot 1\ \mathrm{d}t\ = -t\cos t + \int \cos t\ \mathrm{d}t \\ &= -t\cos t + \sin t + h. \end{aligned}$$

    Per calcolare il secondo integrale possiamo usare l'identità trigonometrica $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. Allora:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\ \mathrm{d}t\ = \frac{1}{2}\int\ \mathrm{d}t\ + \frac{1}{2}\int \cos 2t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2t\ \mathrm{d}t\ = \frac{1}{2}\ t + \frac{1}{4}\sin 2t + k. \end{aligned}$$

    Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left(t\sin t + \cos^2 t\right)\ \mathrm{d}t &= \left[-t\cos t + \sin t + \frac{1}{2}\ t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} \\ &= -x\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{4}\sin 2x + \\ &\qquad + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin\pi \\ &= -x\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{4}\sin 2x - 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

12. Data la presenza del valore assoluto, distinguiamo le due funzioni che formano la prima componente di $f(x)$, sui due intervalli $(-\infty, 0)$ e $[0, 1)$, e riscriviamo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } \ x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } \ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{4+x^2} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

Iniziamo a trovare tutte le primitive di ciascuna delle tre funzioni che compongono $f(x)$.

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int \sqrt{-x}\ \mathrm{d}x = \int (-x)^{1/2}\ \mathrm{d}x = -\frac{(-x)^{3/2}}{3/2} + c_1 \\
&= -\frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3} + c_1\ , \qquad \text{se } x < 0. \\
F_2(x) &= \int \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \int (x)^{1/2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x)^{3/2}}{3/2} + c_1 \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_2\ , \qquad \text{se } x \in (0,1). \\
F_3(x) &= \int \frac{1}{4+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c_3\ , \qquad \text{se } x > 1.
\end{aligned}$$

Le primitive generalizzate devono essere funzioni continue. Dunque deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} F_1(x) = \lim_{x\to 0^+} F_2(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} F_2(x) = \lim_{x\to 1^+} F_3(x).$$

Pertanto

$$c_1 = c_2 \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{3} + c_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + c_3$$

da cui

$$c_1 = c_2 = c \qquad \text{e} \qquad c_3 = c + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.$$

Dunque tutte le primitive generalizzate di $f(x)$ sono le funzioni

$$F_c(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\sqrt{-x^3} + c & \text{se } x < 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

Cerchiamo tra esse quella tale che $F_c(0) = 0$, ovvero $0 = \frac{2}{3}0^{3/2} + c$. Si ricava $c = 0$. Pertanto la primitiva cercata è la funzione

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\sqrt{-x^3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

13. a) Per definizione di integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot (x^2+5)^{-\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c\end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx &= \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} \right]_1^t \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

b) Risulta

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx = \int (\arctan x)(\arctan x)' \, dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x + c.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} \left(\arctan^2 t - 0 \right) = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

c) Calcoliamo l'integrale indefinito sfruttandone la linearità e la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x} \right) \, dx & \int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} \, dx + 2 \int xe^{-x} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} \, dx + 2 \int xe^{-x} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 2 \left(-x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) \, dx \right) \\ &= -\frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}+2xe^{-x}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}+2xe^{-x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{3}{8}\frac{x}{1}\sqrt[3]{(8+t^4)^2}-2\cdot e^{-t}(t+1)+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}+2\right]\\ &= \frac{3}{32}+2=\frac{67}{32}.\end{aligned}$$

(Si ricordi che $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}(t+1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{e^t}=0$, in quanto il denominatore ha ordine di infinito superiore al numeratore).

d) Per risolvere l'integrale indefinito, effettuiamo la sostituzione $\sqrt{2x}=t$, da cui $2x=t^2$, e infine $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Dunque:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{t(t^2+1)}\cdot t\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \arctan t+c=\arctan\sqrt{2x}+c.\end{aligned}$$

Passiamo ora al calcolo dell'integrale improprio:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_{1/2}^{b}\frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan\sqrt{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{b}\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan\sqrt{2b}-\arctan 1\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

e) Per calcolare l'integrale indefinito, dobbiamo risolvere un integrale di funzione razionale, il cui denominatore è già scomposto nel prodotto di fattori irriducibili.

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene

$$A=-2\,,\qquad B=2\,,\qquad C=5.$$

Pertanto:

$$\int\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2x+5}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{2x+5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\
&= -2\log|x+2| + \log(x^2+1) + 5\arctan x + c \\
&= \log(x^2+1) - \log(x+2)^2 + 5\arctan x + c.
\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale improprio :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\log\frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\log\frac{t^2+1}{(t+2)^2} + 5\arctan t - \log\frac{1}{4}\right] \\
&= \log 1 + 5\frac{\pi}{2} + \log 4 = \log 4 + \frac{5\pi}{2}.
\end{aligned}$$

14. Risulta

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\ \mathrm{d}x\ = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\ \mathrm{d}x\ + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\ \mathrm{d}x\ .$$

I due integrali impropri convergono entrambi, perché, per $x \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} \sim \frac{-1}{4\sqrt{|x|}}\,.$$

Calcoliamo il primo integrale indefinito, con la sostituzione $\sqrt{-x} = t$, da cui $x = -t^2$, $\mathrm{d}x\ = -2t\ \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t(-t^2-4)}(-2t)\ \mathrm{d}t\ = 2\int \frac{1}{t^2+4}\ \mathrm{d}t \\
&= \arctan\frac{t}{2} + c = \arctan\frac{\sqrt{-x}}{2} + c
\end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo integrale indefinito, con la sostituzione $\sqrt{x} = t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t(t^2-4)} 2t\ \mathrm{d}t\ = 2\int \frac{1}{(t-2)(t+2)}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\ \mathrm{d}t\ = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| + c
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a}\frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\,\mathrm{d}x \;+\\ &\qquad + \lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to 0^-}\left(\arctan\frac{\sqrt{-a}}{2}-\arctan\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\left(\log\frac{1}{3}-\log\left|\frac{\sqrt{b}-2}{\sqrt{b}+2}\right|\right)\\ &= -\,\frac{1}{2}\log 3-\arctan\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

15. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}$$

quindi l'integrale converge se $n-1>1$, cioè se $n>2$. Pertanto il più piccolo valore di $n\in\mathbb{N}$ per cui l'integrale converge è $n=3$. In tal caso:

$$\int \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+3)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -\,\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}+c.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\int_{2}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+3}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

16. a) Per $x\to 0^+$ si ha

$$\frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}} \sim \frac{1}{4^{b+1}x^a}$$

quindi l'integrale converge in un intorno destro di $x=0$ se $a<1$.

Per $x\to+\infty$ si ha

$$\frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}} \sim \frac{1}{9^{b+1}x^{a+b+1}}$$

quindi l'integrale converge se $a+b+1>1$, cioè se $b>-a$.

Globalmente l'integrale converge per $a<1$ e $b>-a$.

b) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t(4+9t^2)}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{4+9t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\arctan\frac{3t}{2}\right]_0^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{3b}{2}=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

17. a) Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-2x-3|-x^2-2x-3}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^3 \left(\frac{-2}{x^{\alpha-2}}\right)\,\mathrm{d}x \;+ \int_3^{+\infty} \left(\frac{-4x-6}{x^\alpha}\right)\,\mathrm{d}x\quad .$$

L'integrale

$$\int_0^3 \left(\frac{-2}{x^{\alpha-2}}\right)\,\mathrm{d}x$$

converge per $\alpha < 3$ mentre l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \left(\frac{-4x-6}{x^\alpha}\right)\,\mathrm{d}x$$

converge per $\alpha > 2$.

Pertanto l'integrale assegnato converge per $\alpha \in (2,3)$.

b) Risulta

$$\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{(1-3x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\,\mathrm{d}x\ .$$

Per $x \to 4$, si ha: $\frac{(1-3x)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \sim \frac{-44}{x-4}$. Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$ diverge, anche l'integrale di partenza diverge.

18. Per $x \to 2^+$ si ha

$$\frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} \sim \frac{2(x-2)^\alpha}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

quindi l'integrale converge se $\alpha > -\dfrac{1}{2}$.

Per $\alpha = 0$ dobbiamo calcolare:

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{t\to 2^+} \left[\sqrt{x^2-4}\right]_t^3 = \lim_{t\to 2^+} (\sqrt{5}-\sqrt{t^2-4}) = \sqrt{5}.$$

19. a) Se $a \le 2$, l'integrale diverge, data la presenza del fattore $\frac{1}{x-2}$. Se $a > 2$, l'integrale converge perché il fattore $\frac{1}{\sqrt{|x-3|}}$ non dà problemi di integrazione impropria (al finito), mentre all'infinito la frazione integranda si comporta come $\frac{1}{x^{3/2}}$ e dunque converge.

b) Per $a = 6$, mediante la sostituzione $\sqrt{x-3} = t$ l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int_6^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\lim_{b\to+\infty}\int_{\sqrt{3}}^{b} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

20. Dobbiamo studiare la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Utilizziamo il criterio del confronto; osserviamo che

$$\frac{|\sin x|}{x^2+x+1} \le \frac{1}{x^2+x+1},$$

e che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

è convergente. Infatti, il primo addendo non è un integrale improprio; quanto al secondo addendo, per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^2+x+1} \sim \frac{1}{x^2}$$

e l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Pertanto l'integrale assegnato converge assolutamente.

21. a) Nell'intervallo $[0,1]$ la funzione integranda $f(x) = \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}$ presenta solo una singolarità in $x = 0$. Per capire il comportamento di $f(x)$ in $x = 0$, utilizziamo le seguenti equivalenze, valide per $x \to 0^+$:

$$\log(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x} \quad \text{e} \quad \sin x \sim x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche il nostro integrale (si osservi che, per $x \in [0,1]$, $\sin x \ge 0$ e dunque $f(x) \ge 0$ e si può applicare il criterio del confronto asintotico).

b) Nell'intervallo $[3, +\infty)$ la funzione integranda $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\,\sqrt{2x+3}}$ non presenta singolarità, ed è positiva. Pertanto conta solo il suo comportamento per $x \to +\infty$. Ora, per $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} \sim \frac{x}{x\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ diverge, anche l'integrale di partenza risulta divergente.

22. Per $x \to 0$, si ha:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \log(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x}$$

dunque

$$\frac{1-\cos x}{x^2 \log(1+\sqrt[3]{x})} \sim \frac{x^2/2}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\,, \qquad x \to 0\,.$$

Dunque, per $x \to 0$, $f(x)$ ha ordine di infinito $\frac{1}{3}$, e la sua parte principale è la funzione $g(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$.

Prima di studiare la convergenza dell'integrale improprio, osserviamo che, per $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$. Inoltre:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\beta} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x \; + \\ + \int_\beta^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x \;\;,\quad \forall \beta \in \mathbb{R}_+\,.$$

In base allo studio fatto in precedenza, possiamo affermare che il primo addendo converge, perché, per $x \to 0$, $f(x) \sim g(x)$ e l'integrale improprio $\int_0^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ è convergente.

Per studiare la convergenza del secondo integrale, utilizziamo il criterio del confronto:

$$\frac{1-\cos x}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2\log(1+\sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2},$$

per β abbastanza grande (deve essere $\beta > (e-1)^3$). Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_\beta^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, anche il secondo integrale converge.

Pertanto l'integrale assegnato è convergente.