Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{x^2+2x}$

$b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3\sin 2x}{x-2\sin 3x}$

$c)\quad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2-\tan(2x^3)}{2x^5+5\sin^3 x}$

$d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x^3+\sqrt{x}}$

$e)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\pi^x-3^x}{x}$

$f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{5^x-1}$

$g)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x^3}-x^6}{4x^6-\sqrt{x^4+x^3}}$

$h)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

$i)\quad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$

$\ell)\quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3\left(2^x-2^{-x}\right)}{3^x+3^{-x}}$

$m)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\log^3 x+x\log^7 x}{1+x^3}$

$n)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x\log^5 x+\sqrt[4]{x}\log x}{\sqrt{x}}$

$o)\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$p)\quad \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$q)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

$r)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\, 3^x\right)}{x}$

$s)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^3 x}-1}{x(\cos x-e^{x^2})}$

$t)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(e+x)-1}{x}$

$u)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}$

$v)\quad \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

2. Verificare che $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{5}$ e $g(x)=\sqrt{x+7}-\sqrt{7}$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x\to 0$ e determinare $k\in\mathbb{R}$ tale che $g(x)\sim k\,f(x)$.

3. Confrontare tra loro gli infinitesimi $x-2$, $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$, $(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ per $x\to 2$.

4. Calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $p(x)=kx^\alpha$ rispetto

all'infinitesimo campione x per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

a) $e^{3x^4} - 1$

b) $e^{\sqrt{x^2+1}} - e$

c) $\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}+x^2}$

d) $\log(\cos x)$

e) $\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$

f) $e^{e^x} - e^{\cos x}$

g) $\log(x+3) - \log 3$

h) $\sin(2x^2)\left(\sqrt{1+3x}-1\right)$

i) $\sqrt{1-\cos(x^2)}$

ℓ) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

m) $\dfrac{\sin x + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

n) $x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2}$

o) $\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)$

p) $\dfrac{1+\sin x}{1-x} - 1$

q) $\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{1+2x} - 1$

r) $\log\left(\sqrt{9+x}-2\right)$

5. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $p(x) = \frac{k}{x^\alpha}$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

a) $\dfrac{2x^2+\sqrt[3]{x}}{x^3}$

b) $\arctan\dfrac{3}{x^2}$

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

d) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x}} - 1$

e) $e^{\frac{x+1}{x}} - e$

f) $\log\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)$

6. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $p(x) = k(x-x_0)^\alpha$ rispetto all'infinitesimo campione $x - x_0$ per x che tende al valore x_0 indicato delle seguenti funzioni:

a) $\log x - \log 2\,, \quad x \to 2$

b) $e^x - e\,, \quad x \to 1$

c) $1 - \sin x\,, \quad x \to \pi/2$

d) $1 + \cos(x^2)\,, \quad x \to \sqrt{\pi}$

7. Determinare l'ordine di infinito α e la parte principale $p(x) = kx^\alpha$ rispetto all'infinito campione x per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$a) \quad \frac{x^{3/2} + 5x^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} \qquad\qquad b) \quad \sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + \sqrt{x}$$

8. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$$a) \quad f(x) = \frac{x^2 - (x+1)|x-2|}{2x+3} \qquad\qquad b) \quad f(x) = |x| e^{\frac{x+1}{x}}$$

9. Determinare, per $x \to +\infty$, l'asintoto di

$$f(x) = \log(e^x + x).$$

Ha senso cercare l'asintoto per $x \to -\infty$?

10. Confrontare fra loro i seguenti infiniti per $x \to +\infty$ mettendoli in ordine crescente di infinito:

$$2^x,\ x^x,\ \frac{x^2}{\log^{100} x},\ x \log^{10} x,\ 2^{5^x},\ x^2,\ 2^x \log x,\ x^2 2^x$$

11. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \qquad\qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n+1}$$

$$c) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} \qquad\qquad d) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2+1}}$$

$$e) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2} \qquad\qquad f) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n}$$

$$g) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n \qquad\qquad h) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

$$i) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}} \qquad\qquad \ell) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n}$$

$$m) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)^n \qquad\qquad n) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \log n}$$

$$o) \quad \lim_{n\to\infty} n^2\, 2^{-\sqrt{n}} \qquad\qquad p) \quad \lim_{n\to\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right)$$

12. Verificare che per $n \to \infty$

$$a) \quad \frac{(n+3)! - n!}{(n+1)!} \sim n^2 \qquad\qquad b) \quad \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

13. Calcolare la parte principale per $n \to \infty$ di

$$a) \quad \binom{2n-1}{3} \qquad\qquad b) \quad \frac{\sqrt{n} - 2n^3 + n\log n}{5n + \log n}$$

14. Dimostrare che 3^n è un infinito di ordine inferiore a $n!$ per $n \to \infty$.

Svolgimento

1. Si ha
a) Ricordando che $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, otteniamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{3}{2}.$$
b) Si ha $\sin t = t + o(t)$ per $t \to 0$, quindi
$$x^2 + 3\sin 2x = x^2 + 6x + o(x) = 6x + o(x)$$
$$x - 2\sin 3x = x - 6x + o(x) = -5x + o(x)$$
e dunque
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3\sin 2x}{x-2\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x+o(x)}{-5x+o(x)} = -\frac{6}{5}.$$
c) Essendo $\tan t = t + o(t)$, $t \to 0$, e $\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$, si ha
$$x^2 - \tan(2x^3) = x^2 - 2x^3 + o(x^3) = x^2 + o(x^2)$$
$$2x^5 + 5\sin^3 x = 2x^5 + 5x^3 + o(x^3) = 5x^3 + o(x^3)\,.$$
Pertanto
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2-\tan(2x^3)}{2x^5+5\sin^3 x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2+o(x^2)}{5x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{5x} = \pm\infty.$$
d) Utilizzando lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{x^3+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x^2+o(x^2))}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+o(x^2)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = 0.$$
e) Ricordando lo sviluppo $a^x = 1 + x\log a + o(x)$ per $x \to 0$, con $a = \pi$ e $a = 3$, si ha
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\pi^x - 3^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x\log\pi - \cancel{1} - x\log 3 + o(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x(\log\pi - \log 3) + o(x)}{x} = \log\pi - \log 3 = \log\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$
f) Ricordando che $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$ per $t \to 0$, e $5^x = 1 + x\log 5 + o(x)$, $x \to 0$, si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{5^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}4x+o(x)-1}{1+x\log 5+o(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{x\log 5+o(x)} = \frac{2}{\log 5}.$$

g) Notiamo che $\sqrt{x^4+x^3} = x^{3/2}\sqrt{1+x} = x^{3/2} + o(x^{3/2})$ per $x \to 0^+$, dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^3} - x^6}{4x^6 - \sqrt{x^4+x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\, x^{3/2} + o(x^{3/2})}{-x^{3/2} + o(x^{3/2})} = -\sqrt{2}.$$

h) Raccogliendo il termine $\sqrt[3]{1-x}$ e ricordando lo sviluppo $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1-x}\, \frac{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2x}{1-x}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\, \frac{2x}{1-x}\, \frac{1}{x} = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

i) Procedendo come nell'esercizio precedente si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}\right) &= \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) \\ = -\lim_{x\to +\infty} x^{5/6}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x-1}} - 1\right) &= -\lim_{x\to +\infty} x^{5/6}\frac{1}{3}\, \frac{2}{x-1} = 0\,.\end{aligned}$$

ℓ) Ricordiamo che per $x \to +\infty$ la funzione a^x con $a > 1$ è un infinito di ordine superiore a x^α, qualunque sia $\alpha > 0$. Si ha allora

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\,(2^x - 2^{-x})}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\, 2^x}{3^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} = 0.$$

Analogamente per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\,(2^x - 2^{-x})}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3\, 2^{-x}}{3^{-x}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^t} = 0.$$

m) Per $x \to +\infty$ la funzione $(\log x)^\alpha$ è un infinito di ordine inferiore a x^β $\forall \alpha, \beta > 0$, quindi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \log^3 x + x \log^7 x}{1 + x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \log^3 x}{x^3}\, \frac{1 + \frac{\log^4 x}{x}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log^3 x}{x} = 0.$$

n) Ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0$, per ogni $\alpha, \beta > 0$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{x \log^5 x + \sqrt[4]{x} \log x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} \log^5 x + \frac{\log x}{x^{1/4}}\right) \\ &= 0 + (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

o) Si ha $\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x \to +\infty$, e $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\log\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\log\left(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\left(-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)} = e^{-1/2}.\end{aligned}$$

p) Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x\to0} e^{\frac{\log\sqrt{1+x}}{\sin x}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{2}\frac{\log(1+x)}{\sin x}}\\ &= \lim_{x\to0} e^{\frac{x+o(x)}{2x+o(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x+o(x)}{2x+o(x)}} = e^{1/2}.\end{aligned}$$

q) Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} &= \lim_{x\to0}\frac{1+3x+o(x)-\left(1-\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x+o(x)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{7}{2}x+o(x)}{x+o(x)} = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

r) Essendo $3^x = 1 + x\log 3 + o(x)$ per $x \to 0$ e $\sin t = t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\sin(\pi\, 3^x) &= \sin(\pi + \pi x\log 3 + o(x)) = -\sin(\pi x\log 3 + o(x))\\ &= -\pi x\log 3 + o(x),\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\,3^x)}{x} = -\pi\log 3.$$

s) Essendo $\tan^3 x = (x+o(x))^3 = x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$, abbiamo

$$e^{\tan^3 x} - 1 = e^{x^3+o(x^3)} - 1 = 1 + x^3 + o(x^3) - 1 = x^3 + o(x^3)$$

$$x(\cos x - e^{x^2}) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 + x^2 + o(x^2)\right)\right) = -\frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan^3 x}-1}{x(\cos x - e^{x^2})} = \lim_{x\to0}\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3+o(x^3)} = -\frac{2}{3}.$$

t) Notiamo che

$$\begin{aligned}\log(e+x)-1 &= \log e\left(1+\frac{x}{e}\right)-1=\log e+\log\left(1+\frac{x}{e}\right)-1\\ &= \log\left(1+\frac{x}{e}\right),\end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{x}{e}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e}+o(x)}{x}=\frac{1}{e}.$$

u) Usiamo gli sviluppi $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ per $x\to 0$ e $\sin t=t+o(t)$ per $t\to 0$, e l'identità $\sin(\pi-t)=\sin t$. Risulta

$$\sin(\pi\cos x)=\sin\left(\pi-\pi\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\sin\left(\pi\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\pi\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$x\sin x=x(x+o(x)=x^2+o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{\pi}{2}.$$

v) Osserviamo che

$$\left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\frac{\log\left(\sqrt{4+x}-1\right)}{e^x-1}}.$$

Ma,

$$\sqrt{4+x}-1=2\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{4}+o(x)\right)-1=1+\frac{x}{4}+o(x),$$

da cui

$$\frac{\log\left(\sqrt{4+x}-1\right)}{e^x-1}=\frac{\log\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right)}{1+x+o(x)-1}=\frac{\frac{x}{4}+o(x)}{x+o(x)}.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{x}{4}+o(x)}{x+o(x)}}=e^{1/4}.$$

2. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{7}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}},$$

quindi $g(x)\sim\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}f(x)$, $x\to 0$.

3. Si ha

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2(x-2)}=0,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\left(\frac{2-x}{2x}\right)^{1/3}}=-\lim_{x\to 2}(x-2)^{2/3}(2x)^{1/3}=0.$$

Quindi $\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x-2$, e $x-2$ è un infinitesimo di ordine superiore a per $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$ per $x\to 2$. Possiamo anche calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x-2)^\alpha$ per $x\to 2$ rispetto a $x-2$ (l'infinitesimo campione di ordine 1). Infatti si ha

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2-x}{2x}\right)^{\frac{1}{3}}\sim-\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}\,,\qquad x\to 2,$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2=\left(\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)^2\sim\frac{(x-2)^2}{8}\,,\qquad x\to 2,$$

e quindi $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$ ha ordine $\frac{1}{3}$ e parte principale $-\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}$, e $(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ ha ordine 2 e parte principale $\frac{(x-2)^2}{8}$.

4. a) Ricordando che $e^t-1\sim t$ $(t\to 0)$ abbiamo

$$e^{3x^4}-1\sim 3x^4\,,\qquad x\to 0,$$

quindi $\alpha=4$ e $p(x)=3x^4$.

b) Si ha

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{x^2+1}}-e &= e^{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}-e=e\left(e^{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}-1\right)\\ &= e\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\sim\frac{e}{2}x^2\,,\qquad x\to 0.\end{aligned}$$

Dunque $\alpha=2$ e $p(x)=\frac{e}{2}x^2$.

c) Risulta

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}+x^2}=\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}\sim\frac{1}{2}x^{3/2}\,,\qquad x\to 0\,;$$

pertanto $\alpha=3/2$ e $p(x)=\frac{1}{2}x^{3/2}$.

d) Essendo $\log(1+t)=t+o(t)\sim t$ $(t\to 0)$, si ha

$$\log(\cos x)=\log\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\sim-\frac{1}{2}x^2\,,\qquad x\to 0\,;$$

quindi $\alpha = 2$ e $p(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

e) Notiamo che $\sqrt[3]{x+x^2} \sim \sqrt[3]{x}$ $(x \to 0)$, ma questo non ci permette di concludere che $\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$ è equivalente a x^2 per $x \to 0$. Infatti ricordando che $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \sim \alpha x$ $(x \to 0)$, si ha

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2 &= \sqrt[3]{x}\left((1+x)^{1/3} - 1\right) + x^2 = \sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{3}x + o(x)\right) + x^2 \\ &= \frac{1}{3}x^{4/3} + o(x^{4/3}) \sim \frac{1}{3}x^{4/3}, \qquad x \to 0;\end{aligned}$$

dunque $\alpha = 4/3$ e $p(x) = \frac{1}{3}x^{4/3}$.

f) Per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}e^{e^x} - e^{\cos x} &= e^{1+x+o(x)} - e^{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e\left(e^{x+o(x)} - e^{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\right) \\ &= e\left(x + o(x) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = ex + o(x) \sim ex;\end{aligned}$$

pertanto $\alpha = 1$ e $p(x) = ex$.

g) Si ha

$$\log(x+3) - \log 3 = \log\frac{x+3}{3} = \log\left(1 + \frac{x}{3}\right) \sim \frac{x}{3}, \qquad x \to 0,$$

quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{x}{3}$.

h) Essendo $\sin(2x^2) \sim 2x^2$ e $\sqrt{1+3x} - 1 \sim \frac{3}{2}x$ $(x \to 0)$, si ha

$$\sin(2x^2)\left(\sqrt{1+3x} - 1\right) \sim 3x^3, \qquad x \to 0,$$

pertanto $\alpha = 3$ e $p(x) = 3x^3$.

i) Essendo $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ $(t \to 0)$, si ha

$$\sqrt{1 - \cos(x^2)} = \left(1 - \cos\left(x^2\right)\right)^{1/2} \sim \left(\frac{1}{2}x^4\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \qquad x \to 0;$$

pertanto $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$.

ℓ) Per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right) = x + o(x) \sim x,$$

e quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = x$.

m) Per $x \to 0$ si ha $\sin x = x + o(x)$ e quindi

$$\frac{\sin x + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} = \frac{2x^{1/3} + o(x^{1/3})}{x^{1/5} + o(x^{1/5})} \sim \frac{2x^{1/3}}{x^{1/5}} = 2x^{2/15}.$$

In definitiva $\alpha = 2/15$ e $p(x) = 2x^{2/15}$.

n) La funzione $\sin(2x^3) \sim 2x^3$ $(x \to 0)$ è un infinitesimo di ordine 3, mentre $1 - e^{-x^2} \sim x^2$ $(x \to 0)$ ha ordine 2, quindi

$$x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2} = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2 \quad (x \to 0).$$

In conclusione $\alpha = 2$ e $p(x) = 2x^2$.

o) Utilizzando l'identità $\sin(\pi + t) = -\sin t$ abbiamo per $x \to 0$

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)\sin\left(\pi + \pi\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x + o(x)\right) \sim \frac{\pi}{2}x.$$

Pertanto $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{\pi}{2}x$.

p) Ricordiamo che $\frac{1}{1+t} = 1 - t + o(t)$ $(t \to 0)$, quindi si ha

$$\begin{aligned}(1+\sin x)\frac{1}{1-x} - 1 &= (1 + x + o(x))\,(1 + x + o(x)) \\ &= 2x + o(x) \sim 2x\,, \qquad x \to 0\,;\end{aligned}$$

dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = 2x$.
Possiamo anche procedere calcolando prima il denominatore comune:

$$\frac{1+\sin x}{1-x} - 1 = \frac{\sin x + x}{1-x} = \frac{2x + o(x)}{1 + o(1)} \sim 2x\,, \qquad x \to 0.$$

q) Risulta

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{1+2x} - 1 &= \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1 - 2x}{1+2x} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 2x}{1+2x} \\ &= \frac{-2x + o(x)}{1 + o(1)} \sim -2x\,, \qquad x \to 0\,;\end{aligned}$$

quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = -2x$.

r) Notiamo che

$$\begin{aligned}\sqrt{9+x} - 2 &= 3\sqrt{1 + \frac{x}{9}} - 2 = 3\left(1 + \frac{x}{18} + o(x)\right) - 2 \\ &= 1 + \frac{x}{6} + o(x)\,, \qquad x \to 0,\end{aligned}$$

e quindi

$$\log\left(\sqrt{9+x}-2\right) = \log\left(1+\frac{x}{6}+o(x)\right) = \frac{x}{6}+o(x) \sim \frac{x}{6}\,, \qquad x \to 0\,.$$

Pertanto $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{x}{6}$.

5. a) Si ha

$$\frac{2x^2+\sqrt[3]{x}}{x^3} = \frac{2}{x}+\frac{1}{x^{8/3}} = \frac{2}{x}+o(\frac{1}{x}) \sim \frac{2}{x}\,, \qquad x \to +\infty,$$

essendo $\frac{1}{x^{8/3}}$ un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. Dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{2}{x}$.

b) Essendo $\arctan t \sim t$ $(t \to 0)$, si ha

$$\arctan\frac{3}{x^2} \sim \frac{3}{x^2}\,, \qquad x \to +\infty\,,$$

quindi $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{3}{x^2}$.

c) Notiamo che $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$ $(x \to +\infty)$, ma ciò non ci consente di dire che la funzione $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ è equivalente a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. Infatti per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

e quindi essendo $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}+o(\frac{1}{\sqrt{x}}) \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pertanto $\alpha = \frac{1}{2}$ e $p(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) Essendo $\sqrt{1+t}-1 \sim \frac{1}{2}t$ $(t \to 0)$, si ha

$$\sqrt{\frac{x-3}{x}}-1 = \sqrt{1-\frac{3}{x}}-1 \sim -\frac{3}{2x}\,, \qquad x \to +\infty\,;$$

dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = -\frac{3}{2x}$.

e) Essendo $e^t-1 \sim t$ $(t \to 0)$, si ha

$$e^{\frac{x+1}{x}}-e = e^{1+\frac{1}{x}}-e = e\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) \sim \frac{e}{x}\,, \qquad x \to +\infty.$$

In conclusione $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{e}{x}$.

f) Si ha $\log(1+t) \sim t$ $(t \to 0)$, quindi

$$\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) \sim \frac{2}{x+1} \sim \frac{2}{x}\,, \qquad x \to +\infty.$$

In definitiva $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{2}{x}$.

6. a) Posto $x - 2 = t$, quando x tende a 2, t tende a 0, e quindi

$$\log x - \log 2 = \log\frac{2+t}{2} = \log\left(1 + \frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(x-2)\,, \qquad x \to 2.$$

Dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{1}{2}(x-2)$.

b) Posto $x - 1 = t$, si osservi che per $x \to 1$, $t \to 0$; dunque si ha

$$e^x - e = e\left(e^{x-1} - 1\right) = e\left(e^t - 1\right) \sim e\,t = e(x-1)\,, \qquad x \to 1\,.$$

Quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = e(x-1)$.

c) Posto $x - \pi/2 = t$, si osservi che per $x \to \pi/2$, $t \to 0$; quindi si ha

$$1 - \sin x = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\,, \qquad x \to \frac{\pi}{2}\,;$$

pertanto $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.

d) Poniamo $x - \sqrt{\pi} = t$. Ricordando che $1 - \cos z \sim \frac{1}{2}z^2$ $(z \to 0)$, si ha per $x \to \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x^2) &= 1 + \cos(\sqrt{\pi} + t)^2 = 1 + \cos\left(\pi + 2\sqrt{\pi}\,t + t^2\right) \\ &= 1 - \cos\left(2\sqrt{\pi}\,t + t^2\right) \sim \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\pi}t\right)^2 = 2\pi(x - \sqrt{\pi})^2. \end{aligned}$$

In conclusione $\alpha = 2$ e $p(x) = 2\pi(x - \sqrt{\pi})^2$.

7. a) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x^{3/2} + 5x^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \frac{5x^2 + o(x^2)}{x^{1/2} + o(x^{1/2})} \sim \frac{5x^2}{x^{1/2}} = 5x^{3/2}.$$

Pertanto $\alpha = \frac{3}{2}$ e $p(x) = 5x^{3/2}$.

b) Notiamo che per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x^4 + x^3} - x^2 = x^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x^2\left(\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) = \frac{x}{2} + o(x),$$

e quindi essendo $\sqrt{x} = o(x)$ $(x \to +\infty)$, sarà

$$\sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + \sqrt{x} = \frac{x}{2} + o(x) + \sqrt{x} = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2}\,, \qquad x \to +\infty.$$

Dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{x}{2}$.

8. a) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2x+3} & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{2x^2 - x - 2}{2x+3} & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

dunque $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Essendo

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^{\pm}} \frac{2x^2 - x - 2}{2x+3} = \frac{4}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

la retta $x = -\frac{3}{2}$ è asintoto verticale per f. Essendo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$, la retta $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale destro per f. Infine si verifica facilmente che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = -2,$$

e quindi la retta $y = x - 2$ è asintoto obliquo sinistro per f.

b) Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti laterali per $x \to 0^{\pm}$ valgono

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\, e^{1 + \frac{1}{x}} = e \lim_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = e \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -e \lim_{x \to 0^-} x\, e^{\frac{1}{x}} = (-e) \cdot 0 \cdot e^{-\infty} = 0,$$

quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale (destro) per f. Si ha poi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} |x| e^{1 + \frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1 + \frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ex) = \lim_{x \to +\infty} ex \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = e \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = e,$$

e la retta $y = ex + e$ è asintoto obliquo destro per f. In modo analogo si verifica che la retta $y = -ex - e$ è asintoto obliquo sinistro per f.

9. Notando che
$$\log(e^x + x) = \log\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right) = x + \log\left(1+\frac{x}{e^x}\right),$$
si verifica facilmente che la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro per f.

Non ha senso cercare l'asintoto per $x \to -\infty$ in quanto la funzione è definita su $(x_0, +\infty)$, per un certo $x_0 < 0$.

10. In ordine crescente di infinito per $x \to +\infty$ si ha
$$x\log^{10} x,\ \frac{x^2}{\log^{100} x},\ x^2,\ 2^x,\ 2^x\log x,\ 2^x x^2,\ x^x,\ 2^{5^x}.$$
Per verificare che 2^{5^x} è infinito di ordine superiore a x^x osserviamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{5^x}}{x^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5^x\log 2}}{e^{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{5^x\log 2 - x\log x} = e^{+\infty} = +\infty.$$

11. a) Il limite vale zero perche la successione $(-1)^n$ è limitata mentre $\frac{n}{n^2+1}$ è infinitesima.

b) Il limite non esiste perché la successione dei termini di indice pari tende a $+\infty$, mentre quella dei termini di indice dispari tende a $-\infty$. Notiamo che non è sufficiente dire che "$(-1)^n$ è oscillante e $\frac{n^2+1}{n+1}$ tende a $+\infty$" per concludere che il limite non esiste. Per esempio la successione $a_n = ((-1)^n + 5)\,n$ tende a $+\infty$ perché $a_n \geq 4n\ \ \forall n$, pur essendo il prodotto di una successione oscillante per una successione infinita.

c) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 3.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^2\,\sqrt[n]{3+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3^n-3^{-n})}{4^n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 3^n(1-3^{-2n})}{4^n(1+\frac{n^2}{4^n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(4/3)^n} = 0.$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+\log n+3^n}{2^n+n^4+\log^5 n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(1+\frac{n^6}{3^n}+\frac{\log n}{3^n})}{2^n(1+\frac{n^4}{2^n}+\frac{\log^5 n}{2^n})} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

g) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^2.$$

h) Poiché $1/e < 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n = (e^{-1})^{+\infty} = 0.$$

i) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

ℓ) Si ha

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log[n(1+\frac{1}{n})]}{\log n} = \frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

m) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n = 0^{+\infty} = 0.$$

n) È facile verificare che per ogni $n \geq 3$ vale $1 \leq \log n \leq n$. Moltiplicando per n abbiamo che $n \leq n\log n \leq n^2$, e dunque

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n\log n} \leq (\sqrt[n]{n})^2, \quad \forall n \geq 3.$$

Ricordando che $\sqrt[n]{n} \to 1$ e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\log n} = 1.$$

o) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^2\, 2^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{2\log n - \sqrt{n}\log 2} = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}(-\log 2 + 2\frac{\log n}{\sqrt{n}})} = e^{-\infty} = 0.$$

p) Si ha

$$n^{\sqrt{n}} - 2^n = e^{\sqrt{n}\log n} - e^{n\log 2} = -e^{n\log 2}\left(1 - e^{\sqrt{n}\log n - n\log 2}\right).$$

Ma

$$\lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}\log n - n\log 2} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(-\log 2 + \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-\infty} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = -\lim_{n\to\infty} e^{n\log 2} = -\infty.$$

12. a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-n!}{n^2(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)-1}{n^2(n+1)} = 1.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \log e = 1.$$

13. a) Si ha

$$\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} \sim \frac{4}{3}n^3\,,$$

quindi la parte principale è $\frac{4}{3}n^3$.

b) Si ha

$$\frac{\sqrt{n}-2n^3+n\log n}{5n+\log n} = -\frac{2n^3}{5n}\,\frac{1-\frac{\sqrt{n}}{2n^3}-\frac{\log n}{2n^2}}{1+\frac{\log n}{5n}} \sim -\frac{2}{5}n^2\,,$$

dunque la parte principale è $-\frac{2}{5}n^2$.

14. Scrivendo per esteso $3^n/n!$ possiamo effettuare la seguente maggiorazione:

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3\cdot 3\cdots 3}{1\cdot 2\cdots n} = 3\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n} \le 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{n} = \frac{27}{2n}.$$

Passando al limite per $n\to\infty$ e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0.$$

