Esercizi svolti

1. Discutendo graficamente la disequazione $2 - |x| > \sqrt{3+x}$, verificare che l'insieme delle soluzioni è un intervallo e trovarne gli estremi.

2. Descrivere in forma elementare l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{2x+3} > 0\} \bigcap \{x \in \mathbb{R} : x+1 > \sqrt{x^2-1}\}$.

3. Determinare il dominio di $f(x) = \log_3(2x - \sqrt{x^2-1})$.

4. Determinare dominio ed immagine di $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$.

5. Sia $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}$; determinare il dominio, discutere eventuali simmetrie e l'iniettività della funzione f.

6. Sia $f(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$; determinare la controimmagine $f^{-1}([2, +\infty))$.

7. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - 4x + 9$ non è invertibile. Individuare opportune restrizioni di f che siano invertibili e scrivere l'espressione delle loro inverse.

8. Individuare opportune restrizioni di $f(x) = x^2 - 2|x|$ che siano invertibili. Specificare dominio ed immagine delle inverse, per le restrizioni trovate.

9. Provare che le funzioni
$$f(x) = x^2 - x + 1, \quad x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}, \quad x \geq \frac{3}{4}$$
sono una l'inversa dell'altra. Utilizzare la rappresentazione grafica di f e f^{-1} per risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$.

10. Siano
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{1-x}.$$
Disegnare i grafici di f e di g e determinare dominio e immagine di $g \circ f$ e di $f \circ g$.

11. Data la funzione $h(x) = 2^{2x} - 2^x - 2$

a) esprimere h come prodotto di composizione in cui uno dei fattori è la funzione $f(x) = 2^x$;

b) determinare dominio ed immagine di h.

12. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{\sqrt{x} + x^2 - x^3}$ $\qquad b)\quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x+2} \right)$

$c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x}$ $\qquad d)\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^4 - x^3 + 1}{1 - x^3}$

$e)\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$ $\qquad f)\quad \lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$

$g)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ $\qquad h)\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

13. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2}$ $\qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}$

$c)\quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ $\qquad d)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

$e)\quad \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17} - 2}$ $\qquad f)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x}$

$g)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \cos x}{\sqrt{x} - 1}$ $\qquad h)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x + M(x)^*}{x + \sqrt{x}}$

$i)\quad \lim_{x\to -1^\pm} [x^3 + 1]^*$ $\qquad \ell)\quad \lim_{x\to 1^\pm} [x^4 - 2x^3 - x + 2]^*$

$m)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{[3x+1]^*}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad n)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1}$

* $[x]$ e $M(x)$ denotano rispettivamente la parte intera e la mantissa di x.

14. Dire se esistono (ed eventualmente calcolare) i seguenti limiti:

$a)\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \cos x\right)$ $\qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cos x$

$c)\quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad \lim_{x\to+\infty} x\,M(x)$

15. Determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+\lambda}+x\right) = 2$$

16. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{2x}$ $\qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$

$c)\quad \lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{\sin(2^x-1)}{(2^x-1)^2}$ $\qquad d)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^{2x}+2^{-x}}{(2^x-1)^2}$

$e)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(x^x+x^{-\frac{1}{x}}\right)$ $\qquad f)\quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(e+\frac{2}{x}\right)^x$

17. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ $\qquad b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+1}$

$c)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{1+3^n}$ $\qquad d)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$

$e)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{(n+1)(n+2)}$ $\qquad f)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{\sqrt{n}-\log n}$

18. Sia d_n una successione convergente a $l \in \mathbb{R}$, e sia $a_n = (-1)^n d_n$. Studiare l'esistenza del $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ al variare di l in $\mathbb{R}$.

19. Determinare
$$\lim_{x\to k\pi/2}[\cos x]^*$$
al variare di k in $\mathbb{Z}$. Ove tale limite non esista, discutere l'esistenza dei limiti laterali. Identificare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = [\cos x]$ ed il loro tipo.

* $[x]$ denota la parte intera di x.

20. Determinare per quale valore del parametro α la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{se } x \geq 0 \\ [x]^* + \alpha & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
è continua sull'intervallo $[-1,+\infty)$.

* $[x]$ denota la parte intera di x.

Svolgimento

1. L'unica intersezione della retta r_1 di equazione $y = 2 + x$ con il ramo di parabola di equazione $y = \sqrt{3+x}$ è il punto $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. L'intersezione della retta r_2 di equazione $y = 2 - x$ con il ramo di parabola $y = \sqrt{3+x}$ è il punto $x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

   Disegnando i grafici, si vede che la disequazione è soddisfatta per i valori di x compresi tra x_1 e x_2, cioè per $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$.

   Dunque gli estremi dell'intervallo sono $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

2. Consideriamo separatamente i due insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2x+3} > 0\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > \sqrt{x^2-1}\}\,.$$

   La disequazione $\dfrac{x-1}{2x+3} > 0$ è soddisfatta per $x < -\dfrac{3}{2}$ oppure per $x > 1$. Pertanto $A = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

   La disequazione $x + 1 > \sqrt{x^2-1}$ è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 > x^2 - 1 \end{cases}$$

   che è soddisfatto da tutti i valori di $x \geq 1$. Dunque $B = [1, +\infty)$.

   In definitiva $A \cap B = (1, +\infty)$.

3. Il dominio della funzione f è l'insieme

$$\operatorname{dom} f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x - \sqrt{x^2-1} > 0 \text{ e } x^2 - 1 \geq 0\right\}\,.$$

   Dunque dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 4x^2 > x^2 - 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

   Tale sistema è soddisfatto per ogni valore di $x \geq 1$. Pertanto $\operatorname{dom} f = [1, +\infty)$.

4. Il dominio della funzione f è l'insieme $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - 1 \geq 0\}$. La disequazione $\sin x \geq 1$ è soddisfatta soltanto dai valori di x per cui $\sin x = 1$, dunque
$$\operatorname{dom} f = \left\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
In corrispondenza a tali valori di x, si ha $f(x) = 0$, pertanto $\operatorname{im} f = \{0\}$.

5. Il dominio della funzione f è l'insieme
$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geq 0 \text{ e } x + 1 \geq 0\} = [-1, 1].$$
Poiché $f(-x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{-x+1} = f(x)$, la funzione è pari e pertanto non è iniettiva.

6. Per rispondere alla domanda dobbiamo risolvere la disequazione $\dfrac{x-1}{2-x} \geq 2$, che è equivalente alla $\dfrac{3x-5}{x-2} \leq 0$. Tale disequazione è soddisfatta per $\dfrac{5}{3} \leq x < 2$.
Pertanto $f^{-1}([2, +\infty)) = [\frac{5}{3}, 2)$.
In alternativa, si può osservare che la funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{2-x} = -1 - \frac{1}{x-2}$$
è un'iperbole riferita alle rette $x = 2$ e $y = -1$; si può ottenere il risultato riferendosi al grafico della funzione e tenendo conto del fatto che $f(\frac{5}{3}) = 2$.

7. La funzione non è invertibile su $\mathbb{R}$ in quanto è una parabola con asse di simmetria la retta $x = 2$ e dunque non è iniettiva. Il vertice della parabola è il punto V$=(2, 5)$. Due possibili restrizioni invertibili di f sono:
$$f_1 = f|_{(-\infty,2]} : (-\infty, 2] \to [5, +\infty) \quad \text{e} \quad f_2 = f|_{[2,+\infty)} : [2, +\infty) \to [5, +\infty).$$
Per ottenere le espressioni delle funzioni inverse, è necessario ricavare x in funzione di y dall'equazione $y = x^2 - 4x + 9$. L'equazione $x^2 - 4x + 9 - y = 0$ ha soluzioni $x = 2 \pm \sqrt{y-5}$. Pertanto
$$f_1^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y-5} \qquad \text{e} \qquad f_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-5}.$$
In definitiva, tornando alla variabile x, si ottengono le espressioni delle due funzioni inverse
$$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-5} \qquad \text{e} \qquad f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-5}.$$

8. Si ha
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x < 0, \\ x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$
Abbiamo quattro restrizioni invertibili massimali di f:
$$f_1 = f|_{(-\infty,-1]} : (-\infty, -1] \to [-1, +\infty)\,, \qquad f_2 = f|_{[-1,0]} : [-1, 0] \to [-1, 0]$$
$$f_3 = f|_{[0,1]} : [0, 1] \to [-1, 0]\,, \qquad f_4 = f|_{[1,+\infty)} : [1, +\infty) \to [-1, +\infty)\,.$$
Scambiando tra loro il ruolo del dominio e dell'immagine, si ottiene
$$f_1^{-1} : [-1, +\infty) \to (-\infty, -1]\,, \qquad f_2^{-1} : [-1, 0] \to [-1, 0]$$
$$f_3^{-1} : [-1, 0] \to [0, 1]\,, \qquad f_4^{-1} : [-1, +\infty) \to [1, +\infty)\,.$$

9. Anzitutto si ha $\operatorname{dom} f = [\frac{1}{2}, +\infty) = \operatorname{im} g$, e $\operatorname{dom} g = [\frac{3}{4}, +\infty) = \operatorname{im} f$.

Per provare che le funzioni f e g sono l'una l'inversa dell'altra, dobbiamo verificare che $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \geq \frac{3}{4}$, e che $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \geq \frac{1}{2}$. Ma
$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) + 1 = x$$
e
$$(g \circ f)(x) = g(x^2 - x + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = x\,.$$

Disegnando il grafico di f e di g si vede che la bisettrice $y = x$ è tangente ai grafici di f e g nel punto di ascissa 1, e che $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1$.

10. Il grafico di f è un'iperbole equilatera riferita alle rette $x = -2$ e $y = 2$. Le intersezioni con gli assi cartesiani sono i punti A$=\big(-\frac{1}{2}, 0\big)$ e B$=\big(0, \frac{1}{2}\big)$.

Il grafico di g è un ramo della parabola avente l'asse delle x come asse di simmetria e il vertice nel punto V$=(1, 0)$, rivolta verso la parte negativa dell'asse delle ascisse; l'intersezione con l'asse delle y è il punto C$=(0, 1)$.

Risulta pertanto
$$\operatorname{dom} f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)\,, \qquad \operatorname{im} f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)\,,$$
$$\operatorname{dom} g = (-\infty, 1]\,, \qquad \operatorname{im} g = [0, +\infty)\,.$$

Poiché $\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g = (-\infty, 1] \neq \emptyset$, è definita $g \circ f$ e si ha

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} \leq 1 \right\} = (-2, 1]$$

e

$$\operatorname{im}(g \circ f) = g((-\infty, 1]) = [0, +\infty) .$$

In definitiva $g \circ f : (-2, 1] \to [0, +\infty)$.

Inoltre, poiché $\operatorname{im} g \cap \operatorname{dom} f = [0, +\infty) \neq \emptyset$, è definita $f \circ g$ e si ha

$$\operatorname{dom}(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \wedge \sqrt{1-x} + 2 \neq 0 \right\} = (-\infty, 1]$$

e

$$\operatorname{im}(f \circ g) = f([0, +\infty)) = \left[\frac{1}{2}, 2 \right) .$$

Pertanto si avrà $f \circ g : (-\infty, 1] \to \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

11. a) Si ha $h(x) = (g \circ f)(x)$, dove $g(x) = x^2 - x - 2$.

    b) Si ha $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{im} f = (0, +\infty)$, $\operatorname{im} g = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

    Pertanto $\operatorname{dom} h = \mathbb{R}$ e $\operatorname{im} h = g(0, +\infty) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$; riassumendo, $h : \mathbb{R} \to \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

12. Si ha

    a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{\sqrt{x} + x^2 - x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{-x^3} = -\infty$$

    b) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x+2} \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2-4)(3x+2)} = \frac{2}{9}$$

    c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2 - x + 4)}{x(x^4 - 1)} = -4$$

    d) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4 - x^3 + 1}{1 - x^3} = \frac{1}{0^\mp} = \mp\infty$$

    e) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

    f) Decomponendo in fattori numeratore e denominatore con la regola di Ruffini otteniamo

    $$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(2x+3)}{(x-2)^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{7}{5}.$$

g) Moltiplicando e dividendo per la somma delle radici si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.\end{aligned}$$

h) Procedendo come nell'esercizio precedente otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

13. Si ha

a) Utilizzando il limite fondamentale $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, il suo reciproco, e il teorema del cambiamento di variabile nei limiti, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{x^4}\left(\frac{x^2}{\sin x^2}\right)^2 = 1\cdot 1 = 1.$$

b) Ricordando il limite fondamentale $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

c) Con il cambio di variabili $x-\pi=t$ otteniamo

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -1.$$

d) Ponendo $x-\frac{\pi}{2}=t$ otteniamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -1.$$

e) Ponendo $\sqrt[4]{x+17}=t$ abbiamo $x=t^4-17$ e quando x tende a -1, t tende a 2:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2} = \lim_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+2)(t^2+4) = 32.$$

f) Poniamo $x=\cos t$ da cui $t=\arccos x$. Quando x tende a zero, t tende a $\frac{\pi}{2}$, e ci riconduciamo così al reciproco del limite d):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{t-\frac{\pi}{2}}{\cos t} = -1.$$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$

Abbiamo usato il fatto che $\cos x$ è limitata e $\frac{1}{x}$ è infinitesima per $x \to +\infty$, e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

h) La funzione mantissa è limitata, essendo $0 \le M(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Da questo segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+M(x)}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{M(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = 1.$$

i) Disegnando il grafico di $t = x^3+1$, oppure studiandone il segno, vediamo che quando x tende a $-1^\pm$ la variabile t tende rispettivamente a $0^\pm$. Cambiando variabile e ricordando il grafico della parte intera otteniamo

$$\lim_{x\to-1^\pm} [x^3+1] = \lim_{t\to 0^\pm} [t] = \begin{cases} 0 & \text{se } t \to 0^+ \\ -1 & \text{se } t \to 0^-. \end{cases}$$

ℓ) Studiando il segno di $t = x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x-2)(x^3-1)$ vediamo che quando x tende a $1^\pm$ la t tende rispettivamente a $0^\mp$, e dunque

$$\lim_{x\to 1^\pm} [x^4 - 2x^3 - x + 2] = \lim_{t\to 0^\mp} [t] = \begin{cases} -1 & \text{se } t \to 0^- \\ 0 & \text{se } t \to 0^+. \end{cases}$$

m) Ricordando che $t - 1 < [t] \le t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{[3x+1]}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Passando al limite e utilizzando il teorema del doppio confronto si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[3x+1]^*}{\sqrt{x^2+1}} = 3.$$

n) Essendo $\sqrt{5+\cos x}$ limitata e $\dfrac{1}{x^2+1}$ infinitesima per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1} = 0.$$

14. Si ha

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\cos x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(1+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

b) Il limite non esiste. Infatti posto $f(x)=\sqrt{x}\cos x$ e considerate, ad esempio, le due successioni $x_n=2n\pi$ e $y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, ma $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$, mentre $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=0$.

c) Essendo $\sin\frac{1}{x}$ limitata e $\sqrt{x}$ infinitesima per $x\to 0^+$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0.$$

d) Il limite non esiste. Posto $f(x)=x\,M(x)$ e $x_n=n$, $y_n=n+\frac{1}{2}$, si ha $f(x_n)=0$ e $f(y_n)=\frac{1}{2}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e dunque $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$, mentre $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\dfrac{1}{2}$.

15. Calcoliamo il limite in funzione del parametro λ. Poiché x tende a $-\infty$ possiamo supporre $x<0$ e quindi $|x|=-x$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+\lambda}-x$ otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+\lambda}+x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\lambda}{\sqrt{x^2+\lambda}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\lambda|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{\lambda}{x^2}}+1\right)}=\frac{\lambda}{2}.\end{aligned}$$

Otteniamo così $\lambda=4$.

16. Si ha

a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{x}\right]^2=\left(e^{-\pi}\right)^2=e^{-2\pi}$$

b) Posto $-2x=t$ e ricordando il limite fondamentale $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=-2\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=-2.$$

c) Posto $2^x-1=t$ è facile vedere che $t\to 0^{\pm}$ quando $x\to 0^{\pm}$, dunque

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{\sin\left(2^x-1\right)}{(2^x-1)^2}=\lim_{t\to 0^{\pm}}\frac{\sin t}{t^2}=\lim_{t\to 0^{\pm}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\frac{1}{t}=\pm\infty.$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}+2^{-x}}{(2^x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}\left(1+2^{-3x}\right)}{2^{2x}\left(1-2^{-x}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{2x}+2^{-x}}{(2^x-1)^2}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

e) Ricordiamo che $f(x)^{g(x)} \equiv e^{g(x)\log f(x)}$, quindi

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^x+x^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(e^{x\log x}+e^{-\frac{1}{x}\log x}\right)=e^0+e^{+\infty}=1+\infty=+\infty.$$

f) $$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left(e+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{ex}\right)^x=e^{2/e}.$$

17. Si ha

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3}=e^{2/3}$$

Possiamo anche procedere utilizzando il limite fondamentale $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right]^2=(e^{1/3})^2=e^{2/3}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{1+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^n}(-1+(\frac{2}{3})^n)}{\cancel{3^n}(1+\frac{1}{3^n})}=-1.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(1+\frac{n^2}{2^n})}{3^n(1+\frac{n^3}{3^n})}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\log n}{n^{\cancel{2}}}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0.$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{\sqrt{n}-\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}\frac{1+\frac{1}{\log n}}{1-\frac{\log n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}=0.$$

18. È facile verificare dalla definizione di limite che una successione a_n tende a $l\in\mathbb{R}$ se e solo se le due successioni dei termini di indice pari e di indice dispari, $b_n=a_{2n}=\{a_0,a_2,a_4,\ldots\}$ e $c_n=a_{2n+1}=\{a_1,a_3,a_5,\ldots\}$, tendono entrambe a l. Nel nostro caso $a_{2n}\to l$ mentre $a_{2n+1}\to -l$. Quindi se $l=-l$ cioè $l=0$ allora $\lim_{n\to\infty}a_n=0$; se invece $l\neq0$ il limite di a_n non esiste.

19. Per la periodicità, è sufficiente considerare i casi: $k=0,1,2,3$. Disegnando il grafico di $f(x)=[\cos x]$ si vede che:

$$\lim_{x\to0}f(x)=0\neq f(0)=1;\qquad \lim_{x\to\pi}f(x)=-1=f(\pi);$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0 = f(\frac{\pi}{2}) \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1;$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^+} f(x) = 0 = f(\frac{3}{2}\pi).$$

I punti $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ sono punti di discontinuità eliminabile. I punti $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ sono punti di discontinuità di prima specie (tipo salto).

20. La funzione è continua in tutti i punti di $[-1, +\infty)$ escluso al più lo zero. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + 1) = 1 = f(0),$$

la funzione è continua in zero da destra. Essendo infine

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \alpha + \lim_{x\to 0^-} [x] = \alpha - 1,$$

la funzione sarà continua anche nello zero se e solo se $\alpha - 1 = 1$, cioè $\alpha = 2$.