

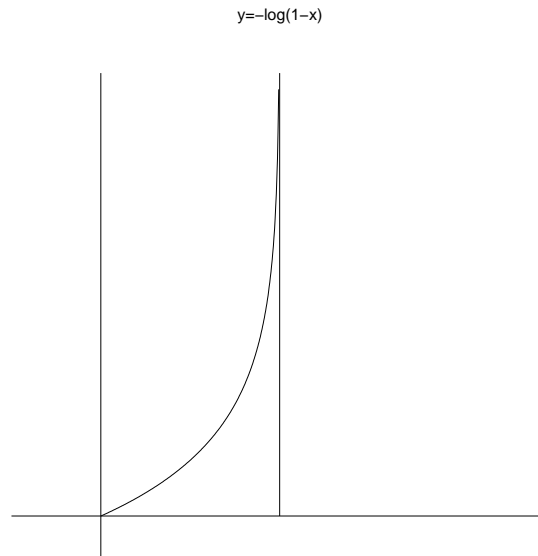
# Compito di Teoria dei Segnali

20/03/2002

Diploma a Distanza in Ingegneria Informatica e Automatica 9520N

Diploma a Distanza in Ingegneria delle Telecomunicazioni 9520F

durata: 2 ore



**Esercizio 1** Sia  $\xi$  una variabile casuale con densità di probabilità

$$f_{\xi}(x)$$

con supporto  $[0, 1]$ , cioè  $f_{\xi}(x) = 0$  per  $x > 1$  e  $x < 0$ , e sia data una trasformazione non lineare,

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &= -\log(1-x) \end{aligned}$$

si calcoli

A) la funzione inversa  $x = g^{-1}(y)$  di  $g(x)$ .

B) la derivata

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$$

C) si calcoli la funzione cumulativa

$$F_\eta(y) = P \{ \eta \leq y \}$$

di probabilità della variabile casuale

$$\eta = g(\xi)$$

D) si calcoli la funzione di densità di probabilità

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y)$$

della variabile casuale

$$\eta = g(\xi)$$

E) calcolare la funzione di densità di probabilità di  $\eta$ , quando  $\xi$  è distribuita uniformemente nell'intervallo  $[0, 1]$ , cioè

$$f_\xi = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Soluzione 1** A) la funzione inversa è  $x = g^{-1}(y) = 1 - e^{-y}$

B) la derivata è  $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = e^{-y}$

C) la funzione cumulativa di probabilità di  $\eta = g(\xi)$  è

$$F_\eta(y) = P \{ \eta \leq y \} = P \{ g(\xi) \leq y \} = P \{ \xi \leq g^{-1}(y) \} = F_\xi(g^{-1}(y))$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che  $g(x)$  è monotona crescente nell'intervallo di interesse

D) la funzione di densità di probabilità di  $\eta = g(\xi)$  è

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\xi(g^{-1}(y)) = f_\xi(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_\xi(g^{-1}(y)) e^{-y}$$

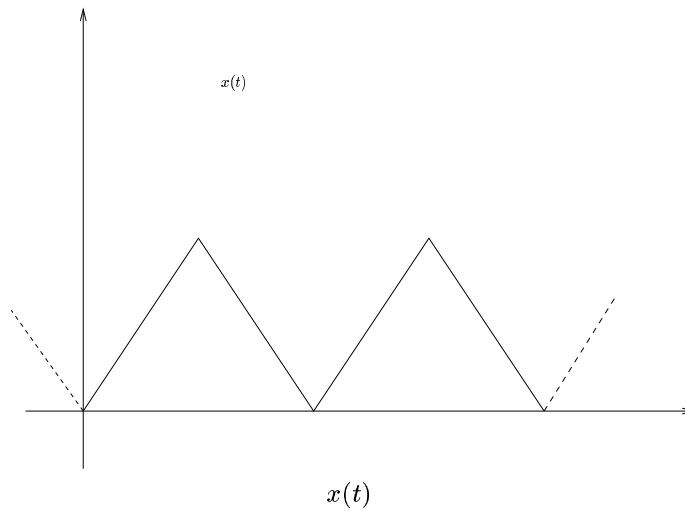
dalla regola della derivata di composizione di funzioni e sostituendo il valore della derivata calcolata al punto B).

E) per il calcolo della funzione di densità di probabilità di  $\eta$ , quando  $\xi$  è distribuita uniformemente nell'intervallo  $[0, 1]$ , notiamo che

$$f_\xi(g^{-1}(y)) = 1, 0 \leq y < \infty$$

quindi

$$f_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq y < \infty \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$



**Esercizio 2** Sia dato il segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(t - nT)$$

di periodo  $T$ , dove  $s(t)$  è una funzione triangolare simmetrica di durata  $T$

$$\begin{aligned} s_T(t) &= \text{tri}\left(\frac{t}{T/2}\right) \\ &= \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T/2}\right| & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Trovare

- A) la trasformata di Fourier di  $x(t)$
- B) l'uscita  $y(t)$  da un filtro passa basso ideale di banda

$$B = \frac{2}{3T}$$

la cui risposta in frequenza è

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con ingresso  $x(t)$ .

**Soluzione 2** A) dato che  $S(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)$  abbiamo che

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{T}{2} \frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

B) l'uscita  $y(t)$  da un filtro passa basso ideale di banda  $B = \frac{2}{3T}$  e di ampiezza unitaria con ingresso  $x(t)$  è data solo dalla componente continua, poiché tutte le componenti spettrali vengono eliminate tranne la componente per  $f = 0$ , ovvero

$$y(t) = h(t) * x(t) = \frac{1}{2}$$