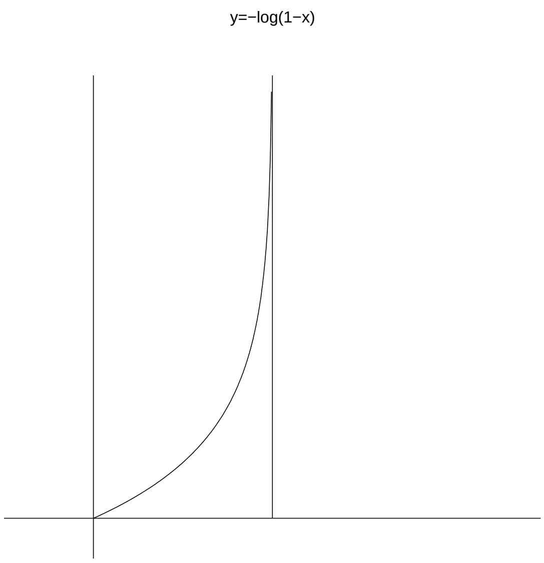
Compito di Teoria dei Segnali

20/03/2002

Diploma a Distanza in Ingegneria Informatica e Automatica 9520N

Diploma a Distanza in Ingegneria delle Telecomunicazioni 9520F

durata: 2 ore



Esercizio 1 *Sia ξ una variabile casuale con densità di probabilità*

$$f_\xi(x)$$

con supporto $[0,1]$*, cioé* $f_\xi(x) = 0$ *per* $x > 1$ *e* $x < 0$*, e sia data una trasformazione non lineare,*

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &= -\log(1-x) \end{aligned}$$

si calcoli

A) la funzione inversa $x = g^{-1}(y)$ *di* $g(x)$*.*

B) la derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y)$$

C) si calcoli la funzione cumulativa

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}\{\eta \le y\}$$

di probabilità della variabile casuale

$$\eta = g(\xi)$$

D) si calcoli la funzione di densità di probabilità

$$f_\eta(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_\eta(y)$$

della variabile casuale

$$\eta = g(\xi)$$

E) calcolare la funzione di densità di probabilità di η, quando ξ è distribuita uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$, cioé

$$f_\xi = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione 1 *A) la funzione inversa è $x = g^{-1}(y) = 1 - e^{-y}$*

B) la derivata è $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) = e^{-y}$

C) la funzione cumulativa di probabilità di $\eta = g(\xi)$ è

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}\{\eta \le y\} = \mathrm{P}\{g(\xi) \le y\} = \mathrm{P}\left\{\xi \le g^{-1}(y)\right\} = F_\xi(g^{-1}(y))$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che $g(x)$ è monotona crescente nell'intervallo di interesse

D) la funzione di densità di probabilità di $\eta = g(\xi)$ è

$$f_\eta(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_\eta(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_\xi(g^{-1}(y)) = f_\xi(g^{-1}(y)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) = f_\xi(g^{-1}(y)) e^{-y}$$

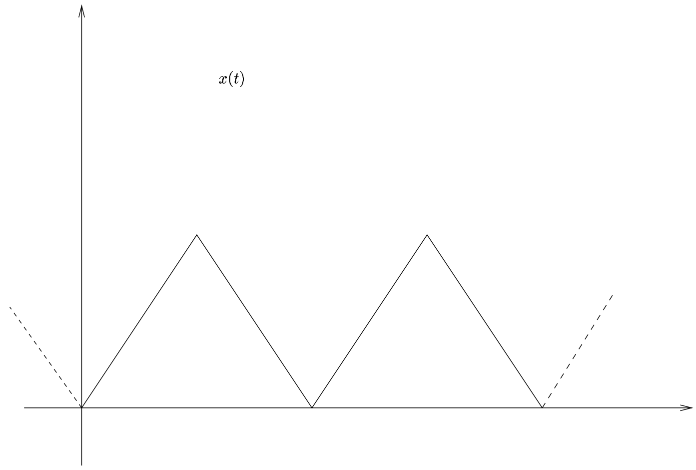
dalla regola della derivara di composizione di funzioni e sostituendo il valore della derivata calcolata al punto B).

E) per il calcolo della funzione di densità di probabilità di η, quando ξ è distribuita uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$, notiamo che

$$f_\xi(g^{-1}(y)) = 1, 0 \le y < \infty$$

quindi

$$f_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \le y < \infty \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$



$x(t)$

Esercizio 2 *Sia dato il segnale periodico*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(t - nT)$$

di periodo T, dove $s(t)$ è una funzione triangolare simmetrica di durata T

$$\begin{aligned} s_T(t) &= \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T/2}\right) \\ &= \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{t}{T/2}\right| & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Trovare

A) la trasformata di Fourier di $x(t)$

B) l'uscita $y(t)$ da un filtro bassa basso ideale di banda

$$B = \frac{2}{3T}$$

la cui risposta in frequenza è

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

con ingresso $x(t)$.

Soluzione 2 *A) dato che* $S(f) = \frac{T}{2}\mathrm{sinc}^2(\frac{T}{2}f)$ *abbiamo che*

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2}\frac{n}{T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

B) l'uscita $y(t)$ *da un filtro bassa basso ideale di banda* $B = \frac{2}{3T}$ *e di ampiezza unitaria con ingresso* $x(t)$ *è data solo dalla componente continua, poiché tutte le componenti spettrali vengono eliminate tranne la componente per* $f = 0$, *ovvero*

$$y(t) = h(t) * x(t) = \frac{1}{2}$$