Prova scritta del 25 gennaio 1999
Traccia della soluzione

I esercizio
La densità spettrale di potenza del segnale $w(t)$ è data da

$$S_w(f) = S_n(f) \cdot |H_1(f)|^2.$$

Il processo $w(t)$ deriva dal filtraggio di un processo gaussiano, quindi risulterà ancora gaussiano. Per definirne la densità di probabilità è sufficiente calcolare media e varianza.

- Media:

$$\mu_w = E\{w(t)\} = E\{n(t)\} = 0.$$

- Varianza:

$$\sigma_w^2 = E\{w^2(t)\} - \mu_w^2 = R_w(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) \cdot |H_1(f)|^2 df =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot 4B = 2N_0B.$$

Poichè il processo è stazionario una variabile casuale ξ estratta in un qualunque istante di tempo avrà desità di probabilità gaussiana con media μ_w e varianza σ_w^2.

Calcoliamo ora lo spettro del processo $y(t)$; la funzione di trasferimento equivalente del sistema è:

$$H_{eq}(f) = H_2(f) - H_1(f)$$

La densità spettrale di potenza di $y(t)$ sarà:

$$S_y(f) = S_n(f)|H_{eq}(f)|^2 = S_n(f)[|H_1(f) - H_2(f)|^2].$$

$|H_{eq}(f)|^2$ è una funzione di trasferimento di ampiezza 1 con supporto sugli intervalli di frequenza $(-4B, -2B)$ e $(2B, 4B)$. Antitraformando la densità spettrale di potenza $S_y(f)$ con l'ausilio delle tavole si ottiene la funzione di autocorrelazione:

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot 2B \cdot \frac{\sin(\pi\tau 2B)}{\pi\tau} \cos(3B\tau).$$

Sostituendo il valore $\tau = t_1 - t_2 = \frac{1}{2B}$ si verifica che $R_y(\tau) = 0$, cioè le variabili η_1 e η_2 sono incorrelate.

II esercizio

Applicando le proprietà delle trasformate di Fourier si trova che:

$$X(f) = \frac{1}{\alpha} p_{\frac{\alpha}{T}}(f)$$

in cui $p_{\frac{\alpha}{T}}(f)$ è una porta di ampiezza 1 e supporto sull'asse delle frequenze sull'intrevallo $(-\alpha/2T, \alpha/2T)$.

- Energia di $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{\alpha T}$$

- Energia di $x(t-\theta)$:

$$X_1(f) = \frac{1}{\alpha} p_{\frac{\alpha}{T}}(f) e^{-j2\pi f\theta}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)e^{-j2\pi f\theta}|^2 df == \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{\alpha T}.$$