Prova scritta del 23 marzo 1999
Traccia della soluzione

I esercizio
Linearità:
Si applichi all'ingresso del sistema un segnale $x(t)$; l'uscita sarà:

$$z(t) = 2x(t) * h(-t) + x(t) * h(t)$$

Essendo la convoluzione un'operazione lineare è possibile scrivere:

$$z(t) = x(t) * h_{eq}(t)$$

in cui $h_{eq}(t) = 2h(-t) + h(t)$ è una risposta all'impulso equivalente del sistema. Applicando all'ingresso un segnale $y(t)$ si ottiene un'uscita:

$$w(t) = y(t) * h_{eq}(t),$$

e applicando all'ingresso il segnale $x(t) + y(t)$,

$$u(t) = [x(t) + y(t)] * h_{eq}(t)$$

Poiché $u(t) = z(t) + w(t)$ il sistema è lineare.

Applicando all'ingresso un segnale $x(t-\theta)$ si ottiene in uscita:

$$r(t) = x(t-\theta) * h_{eq}(t)$$

quindi il sistema è anche tempo invariante. Infatti, essendo il sistema complessivo combinazione lineare di blocchi LTI è ancora LTI complessivamente.

II esercizio

a) Il numero di combinazioni possibili è $N = 10^5$, quindi la probabilità che il ladro riesca al primo tentativo è

$$p_1 = \frac{1}{10^5}$$

b) La probabiltà che riesca al II tentativo è data dalla probabilità dell'evento "viene indovinata la combinazione al II tentativo" condizionata all'evento "non viene indovinata la combinazione al I tentativo". E analogamente per il terzo tentativo. Poiché non viene ripetuto lo stesso numero già tentato il numero di casi possibili diminuisce di una unità ad ogni tentativo. La probabilità di successo $P(s)$ sarà quindi:

$$P(s) = \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)\frac{1}{N-2}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che $P(s) = \frac{3}{N}$, ovvero la probabilità di successo è la stessa del caso in cui si scelgano *contemporaneamente* 3 codici tra tutti quelli possibili.

III esercizio

a) Il segnale $y(t)$ all'uscita del dispositivo non lineare:

$$y(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1 + cos(4\pi f_0 t)}{2}$$

da cui si ricava che la banda del segnale è $B_y = 2f_0$. Per garantire la perfetta ricostruzione del segnale $y(t)$ $f_c \geq 2B_y$ e la banda del filtro B deve essere tale da tagliare le repliche in frequenza dello spettro del segnale campionato, ad esempio $B = B_y$.

b) Le condizioni per la perfetta ricostruzione sono rispettate e quindi $e(t) = 0$.