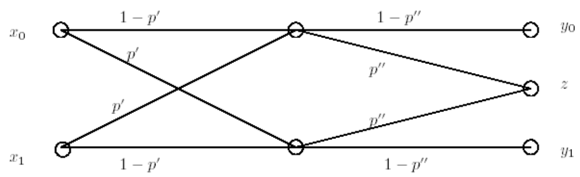
Soluzione compito di Teoria dei Segnali

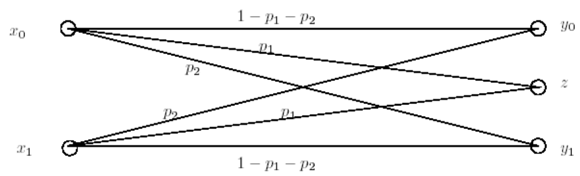
23/03/2002

A cura di Francesco Alesiani

Esercizio 1

Si consideri un sistema di comunicazione che può essere modellizzato come la cascata di due canali simmetrici indipendenti con probabilità di transizione p' e p'', rispettivamente, secondo la figura riportata.



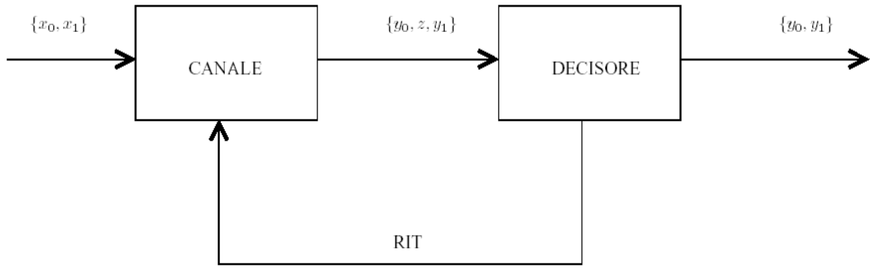


Ricavare:

A) P{y0|x0}, P{y1|x0} e P{z|x0}, del canale risultante dalla cascata dei due canali,

B) la probabilità di errore del canale prodotto, ovvero la probabilità di non ricevere y0 quanto è stato trasmesso x0 o di non ricevere y1 quando è stato trasmesso x1: P{E1}

C) la probabilità di ritrasmissione, P{RIT}, e la probabilità di errore complessiva del sistema, P{E}, quando si richiede la ritrasmissione del simbolo nel caso si riceva il simbolo z.



Soluzione 1

A) Calcoliamo le probabilità a priori, ovvero le probabilità di avere ricevuto un dato simbolo avendone trasmesso uno tra i possibili simboli del canale in cascata. Queste si calcolano andando a guardare le etichette dei rami del canale prodotto e moltiplicandole se collegano i nodi desiderati. Questa procedura è valida poiché i canali sono indipendenti e gli eventi disgiunti.

- P{y0|x0} = (1 – p’)(1 – p’’) = 1 - p1 - p2
- P{z|x0} = (1 – p’)p’’ + p’p’’ = p’’ = p1
- P{y1|x0} = p’(1 – p’’) = p’ – p’’p’ = p2

le probabilità che riguardano x1 sono analoghe poiché il canale è simmetrico.

B) La probabilità di errore ad un passo, ovvero dopo una singola trasmissione sul canale prodotto risulta:

P{E1} = P{E1|x0}P{x0}+P{E1|x1}P{x1} = (p1+p2)(P{x0}+P{x1}) = p1+p2

C) La probabilità di ritasmissione è già stata calcolata

P{RIT} = P{z|x0}P{x0}+P{z|x1}P{x1} = p’’ = p1

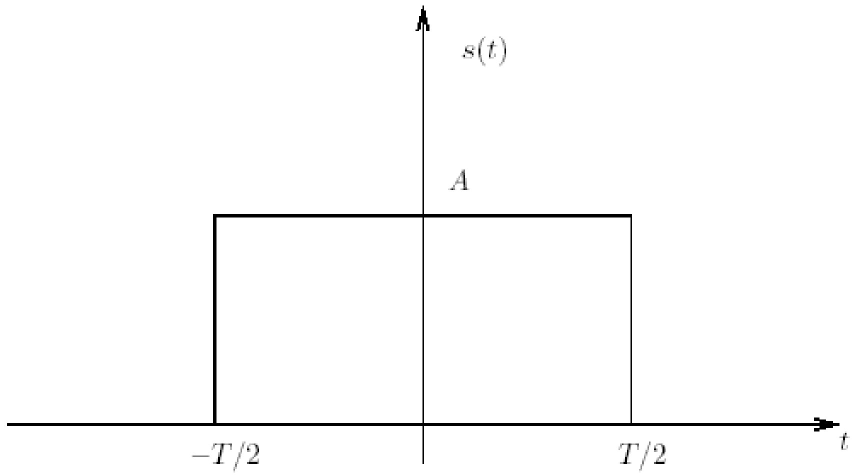
mentre la probabilità di errore totale con richiesta di ritrasmissione risulta essere

P{E} = P{E1} + P{RIT}P{E1}+P{RIT}2P{E1} + . . . =

$$= \frac{P\{E_1\}}{1-P\{RIT\}} = \frac{p'(1-p'')+p''}{1-p''} = \frac{p_1+p_2}{1-p_1}$$

Esercizo 2

Sia s(t) una funzione rettangolare di ampiezza A e durata T centrata in t = 0.



A) Ricavare l'ampiezza A di s(t) sapendo la funzione ha energia unitaria, E{s(t)} = 1;

B) calcolare la trasformata di Fourier S(f) di s(t);

C) sia

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - n\alpha T)$$

con α > 1, calcolare la trasformata di Fourier X(f) di x(t);

D) sia

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

calcolare la trasformata di Fourier Y (f) di y(t);

Soluzione 2

A) Scrivendo l'espressione dell'energia di s(t) è possibile ricavare l'ampiezza del segnale

$$\varepsilon_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = A^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt = A^2 T = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

B) e C) Prima notiamo come

$$s(t) = p(t/T) \to S(f) = TA\,\mathrm{sinc}(fT)$$

dove p(t) = $\begin{cases} 1 \to |t| \le 0.5 \\ 0 \to |t| > 0.5 \end{cases}$

Quindi

$$X(f) = S(f)\frac{1}{\alpha T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{\alpha T}\right)$$

$$= TA\,\mathrm{sinc}\left(fT\right)\frac{1}{\alpha T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{\alpha T}\right)$$

$$= \frac{A}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{\alpha}\right)\delta\left(f - \frac{n}{\alpha T}\right)$$

D)

$$Y(f) = X(f)\frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_0\right) + \delta\left(f + f_0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[X\left(f - f_0\right) + X\left(f + f_0\right)\right]$$

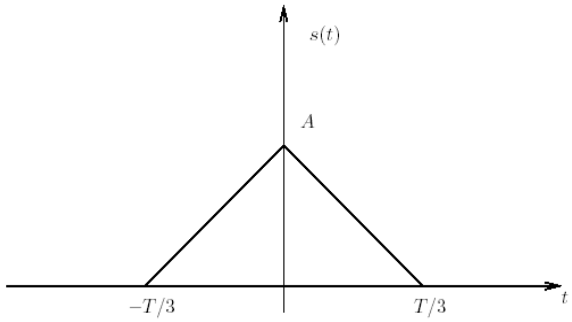
$$= \frac{1}{2}\frac{A}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left[\delta\left(f - \frac{n}{\alpha T} - f_0\right) + \delta\left(f - \frac{n}{\alpha T} + f_0\right)\right]$$

Esercizo 3

Sia

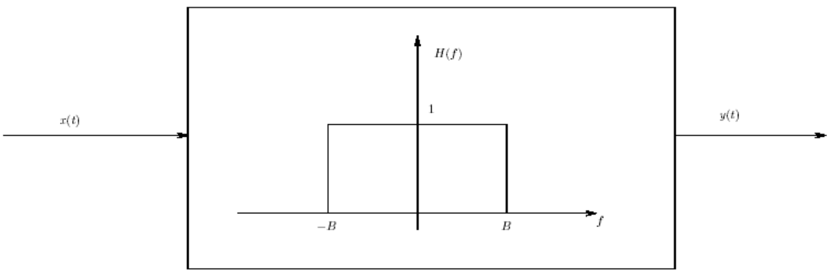
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t-nT)$$

dove s(t) è una funzione triangolare di ampiezza A e durata $\frac{2}{3}$T centrata in t = 0.

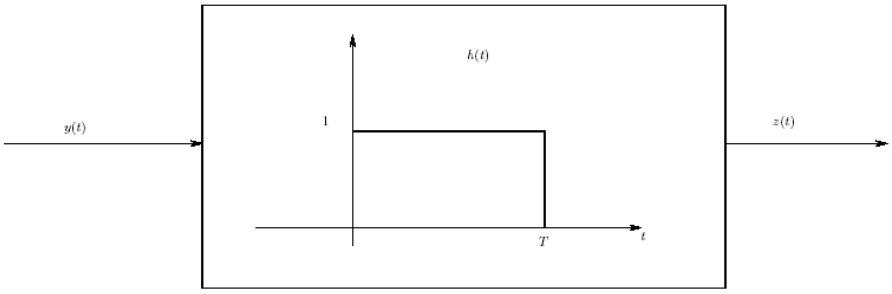


A) calcolare S(f) e X(f);

B) dato un sistema LTI la cui risposta in frequenza è unitaria per $|f| \leq B$ e nulla altrove, ricavare l'espressione per l'uscita y(t) del sistema quando in ingresso c'è x(t), dove $B = \frac{3}{2T}$



C) (opzionale) sia dato un ulteriore sistema LTI con risposta all'impulso casuale rettangolare di ampiezza unitaria e supporto temporale [0, T].
Avendo in ingresso y(t) ricavare l'espressione dell'uscita z(t).



Soluzione 3

A)

$$s(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{T/3}\right) \rightarrow S(f) = \frac{T}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} X(f) &= S(f)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{T}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{3}\right)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

B) A causa del filtro H(f) passa basso ideale, all'uscita del sistema si hanno solo tre righe nello spettro

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=-1}^{+1}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{3}\delta(f) + \frac{1}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\delta\left(f-\frac{1}{T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)\right] \end{aligned}$$

antitrasformando

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{1}{3}\right)2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{6}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \end{aligned}$$

C)

$$z(t) = \int_{t-T}^{t} y(\tau)d\tau = \int_{t-T}^{t} \frac{1}{3} + \frac{6}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)d\tau = \frac{T}{3}$$

poichè l'integrale di cos(2πt/T) sul periodo T è nullo.