Correzione esonero del 4 febbraio 1994

Esercizio 1

Punto a

Esponenziale bilatera

$$f_\xi(x) = \frac{a}{2}e^{-a|\alpha|} \qquad \mu_\xi = 0 \qquad \sigma_\xi^2 = \frac{2}{a^2}$$

infatti

$\mu_\xi = 0$ perché è una funzione pari

$$\sigma_\xi^2 = E\left[\xi^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta\alpha^2 f_\xi(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{a}{2} e^{-|a|x}dx = a\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\ x}dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\ x}dx = \left[x^2 \cdot \frac{e^{-\ x}}{-a}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\frac{e^{-\ x}}{-a}dx = \left[x^2 \cdot \frac{e^{-\ x}}{-a}\right]_0^{+\infty} - \left[2x \cdot \frac{e^{-\ x}}{a^2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\frac{e^{-\ x}}{a^2}dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\ x}dx = 0 - 0 + \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\left[e^{-ax}\right]_0^{+\infty}}{-a} = \frac{2}{a^3}$$

Allora

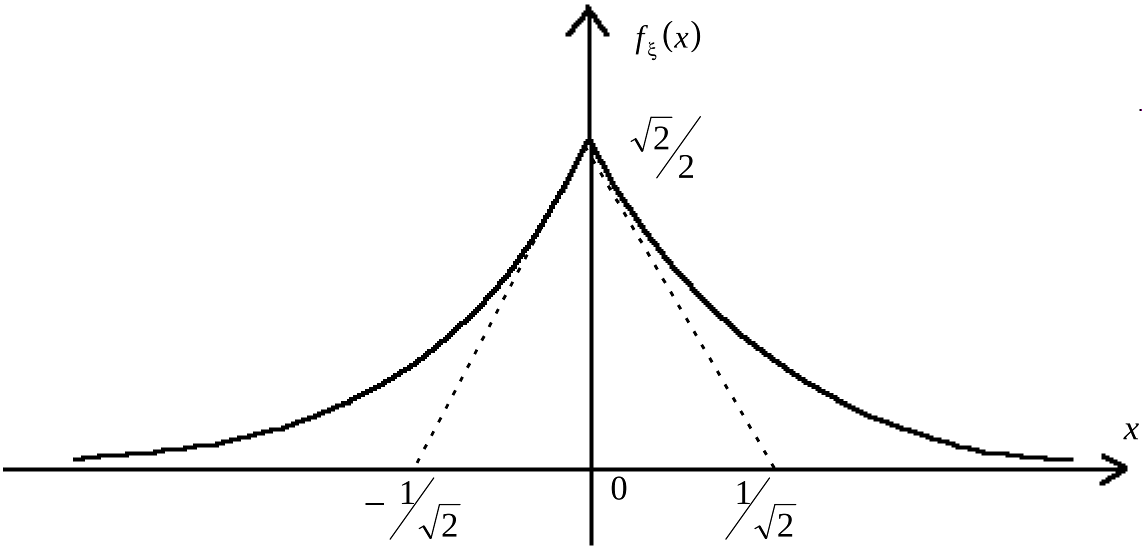
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{a}{2} e^{-|a|x}dx = a \cdot \frac{2}{a^3} = \frac{2}{a^2}$$

Dato che $\sigma_\xi^2 = 1$ segue $1 = \frac{2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$

Punto b

$$f_\xi(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per il grafico qualitativo della $f_\xi(x)$ si veda la figura successiva.



Punto C

$$p\{|\xi| \le x_0\} = p\{-x_0 \le \xi \le x_0\} = \int_{-x_0}^{x_0} f_\xi(x)dx = F_\xi(x_0) - F_\xi(-x_0) = 2\int_0^{x_0} \frac{a}{2} e^{-ax} dx = a\int_0^{x_0} e^{-ax} dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{x_0} e^{-\sqrt{2}x} dx = -1\left(e^{-\sqrt{2}x} - 1\right)$$

allora

$$p\{|\xi| \le x_0\} = 1 - e^{-\sqrt{2}x_0} = 0.9$$

$$e^{-\sqrt{2}x_0} = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\ln\left(e^{-\sqrt{2}x_0}\right) = \ln(0.1)$$
$$-\sqrt{2}x_0 = \ln(0.1)$$
$$\sqrt{2}x_0 = -\ln(0.1) = \ln(10)$$
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(10) \approx 1.628$$

Esercizio 2

Punto a

$$\sigma_\xi^2 = E[\xi^2] - \mu_\xi^2$$
$$\sigma_\xi^2 = E[(\xi - \mu_\xi)] = E[\xi^2 - 2\xi\mu_\xi + \mu_\xi^2] = E[\xi^2] - 2\mu_\xi E[\xi] + \mu_\xi^2 = E[\xi^2] - 2\mu_\xi^2 + \mu_\xi^2 = E[\xi^2] - \mu_\xi^2$$

Punto b

$\mu_{\xi} = x_0 = 5$

$m_{\xi} = \mu_{\xi} = x_0 = 5$

$F_{\xi}(5) = 1/2$

Punto c

$P(A) \neq 0$
$P(B) \neq 0$
$P(A, B) = P(A \cap B) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A)P(B) \neq P(A, B)$

Questo vuol dire che i due eventi non sono statisticamente indipendenti.

Punto d

$$E[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p_i$$

Punto e

Esistono due soluzioni possibili.

La prima consiste nella estrazione contemporanea di due carte. Si crea un insieme S di eventi di $\binom{40}{2}$ elementi che hanno probabilità pari a $1 \Big/ \binom{40}{2}$. Gli eventi favorevoli ("Asso", "Re") sono 4 · 4=16; allora $P = \frac{16}{\binom{40}{2}} = \frac{32}{39 \cdot 40} \cong 0.021$

La seconda dice che la probabilità di un'estrazione contemporanea di un Asso e di un Re è uguale alla somma delle probabilità congiunte di estrarre un Asso come prima carta e un Re come seconda e viceversa.

P { estrazione contemporanea "Asso" e "Re" } = P{ "Asso", "Re" } + P{ "Re", "Asso" } =

=P{ "Asso"|"Re } P{ "Re" } + P{ "Re"|"Asso" } P{ "Asso" }

P{ “Re” } = P{ “Asso” } = $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

P{ “Asso”|”Re } = P{ “Re”|“Asso” } = $\frac{4}{39}$

P { estrazione contemporanea “Asso” e “Re” } = $2 \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4 \cdot 4}{\binom{40}{2}}$

Punto f

Proprietà di $f_\xi(x)$:

1. $f_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$

3. $P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(\vartheta)d\vartheta = F_\xi(x)$

   $f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$

Esercizio 3

$$\begin{cases} p_1 = P\{Y_1 | X_\backslash\} = (1-p)^2 \\ p_2 = P\{Y_3 \cup Y_3 | X_1\} = p(1-p) + (1-p)p = 2(1-p)p \\ p_1 = P\{Y_2 | X_\backslash\} = p^2 \\ q_1 = (1-p)^2 \\ q_2 = 2p(1-p) \\ q_3 = p^2 \end{cases}$$

Il calcolo delle singole probabilità non viene riportato. A titolo di esmpio si esegue:

$$p_1 = P\{Y_1 | X_\backslash\} = P\{00|00\} = P\{0|0\}P\{0|0\} = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$$

Punto b

P{ ERRORE } = P{ non riconoscere l’errore tenendo conto anche della possibile ritrasmissione }

N = { Non riconosce l'errore }

R = { richiedo la ritrasmissione }

allora: ERRORE = N $\cup$ (N, R) $\cup$ (N, R, R) $\cup$ ...

$$P\{\text{ ERRORE }\} = P\{\text{ N }\} + P\{\text{ N, R }\} + P\{\text{ N, R, R }\} + \ldots =$$

$$= P\{\text{ N }\} + P\{\text{ N }\}\, P\{\text{ R }\} + P\{\text{ N}\}\, P\{\text{ R }\}^2 + \ldots =$$

$$= \frac{P\{N\}}{1 - P\{R\}}$$

ma:

$P\{N\}$ = P{ commettere due errori nei due bit } $= P\{(Y_1, X_1) \cup (Y_1, X_2)\} =$
$P\{Y_2|X_1\}P\{X_1\} + P\{Y_1|X_2\}P\{X_2\} = p^2 P\{X_1\} + p^2 P\{X_2\} = p^2\left(P\{X_1\} + P\{X_2\}\right) = p^2$

$P\{R\} = 2p(1-p)$

allora:

$$P\{\text{ ERRORE }\} = \frac{p^2}{1-2p(1-p)} = \frac{p^2}{p^2 + \left(1-p^2\right)}$$

$$\begin{cases} 1 = p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 \\ 1 - 2p(1-p) = p^2 + (1-p)^2 \end{cases}$$

Punto c

Con $p = 10^{-2}$ si ottiene:

$$P\{\text{ ERRORE }\} = \frac{10^{-4}}{10^{-4} + \left(1 - 10^{--2}\right)^2} \cong \frac{10^{-4}}{1 + 10^{-4}} \cong 10^{-4}$$

$$P\{\text{ ERRORE }\} \cong 10^{-4} \ll 10^{-2}$$

La codifica riduce gli errori.