Correzione tema del 4 novembre 1994

Esercizio 1

Indichiamo con p la probabilità che ogni collegamento sia libero e facciamo riferimento alla figura

a) I e IV possono comunicare , prima di tutto se a è libero e , contemporaneamente , se uno dei due collegamenti c ovverob-d è libero.
Se indichiamo con 'a' l'evento ' il canale è libero ' , P{A} può essere espressa come

$$P\{ A\} = P\{ a\cap [c\cup(b\cap d)]\}$$

Lo stato di ogni canale è indipendente dagli altri , quindi posso considerare p la probabilità dell'intersezione come il prodotto delle singole probabilità . Per quanto riguarda le unioni , devo ricordare che gli eventi che considero non sono disgiunti . Perciò :

$$P\{A\} = P\{a\} \bullet [P\{c\} + P\{b\}P\{d\} - P\{c\}P\{b\}P\{d\}] =$$
$$= p \cdot (p + p^2 - p^3) = p^2 + p^3 - p^4 = 0.945$$

b) Con un ragionamento analogo al precedente :

$$P\{B\}=P\{b\cup(c\cap d)\}=P\{b\}+P\{c\}P\{d\}-P\{b\}P\{c\}P\{d\}= p + p^2 - p^3 = 0.995$$

c) Posso avere contemporaneamente la due comunicazioni solo se I e IV si parlano tramite a.c e II e III tramite b .
Perciò : $P\{A,B\}=P\{(a\cap c)\cap b\}=P\{a\}P\{b\}P\{c\}= p^3 = 0.857$

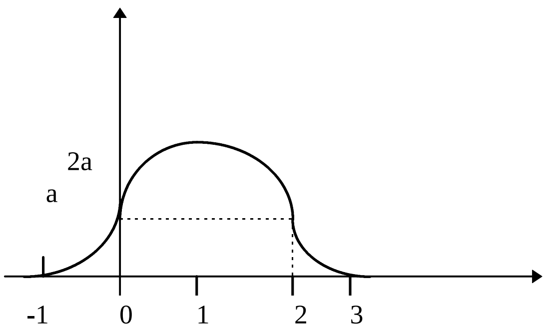
Se il collegamento b viene spostato per far comunicare direttamente I e III , la probabilità P {A} aumenta , perché ora non sono più vincolato ad usare solo il collegamento a .

Infatti : $P\{A\}=P\{(a\cap c)\cup(b\cap d)\}= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4 = 0.99$

Esercizio 2:

La funzione è così definita : $$f_\xi(x) = \begin{cases} a(x+1)^2 \ldots\ldots\ldots -1 \le x \le 0 \\ 2a - a(x-1)^2 \ldots .0 \le x \le 2 \\ a(x-3)^2 \ldots\ldots\ldots 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Nell'ipotesi di a>0 (confermata dal fatto che la $f_\xi(x)$ sia per definizione positiva), l'andamento della curva di $f_\xi(x)$ è il seguente :



Determiniamo il valore di a perché $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)d = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = a\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx + a\int_{0}^{2}[2-(x-1)^2]dx + a\int_{2}^{3}(x-3)^2\,dx =$$

$$= a\cdot\left[\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx + \int_{0}^{2}(1+2x-x^2)dx + \int_{2}^{3}(x^2-6x+9)dx\right] =$$

$$= a\cdot\left[\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\right]_{-1}^{0} + \left.\left(x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{0}^{2} + \left.\left(\frac{x^3}{3}-3x^2-9x\right)\right]_{2}^{3}\right] =$$

$$= a\cdot\left[\frac{1}{3}-1+1+2+4-\frac{8}{3}+9-27+27-\frac{8}{3}+12-18\right] =$$

$$= a\cdot 4 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

La funzione di distribuzione cumulativa $F_\xi(x)$ si ottiene come : $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx$

Per -1<x<0 :

$$F_\xi(x) = \int_{-1}^{x}\frac{1}{4}(x+1)^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}\right)$$

Per 0<x<2 :

$$F_\xi(x)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{4}(x+1)^2dx+\frac{1}{4}\cdot\int_{0}^{x}(2-(x-1)^2)dx=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}\right)$$

Per 2<x<3 :

$$F_\xi(x)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{4}(x+1)^2dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}(2-(x-1)^2)dx+\int_{2}^{x}\frac{1}{4}(x-3)^2dx=$$

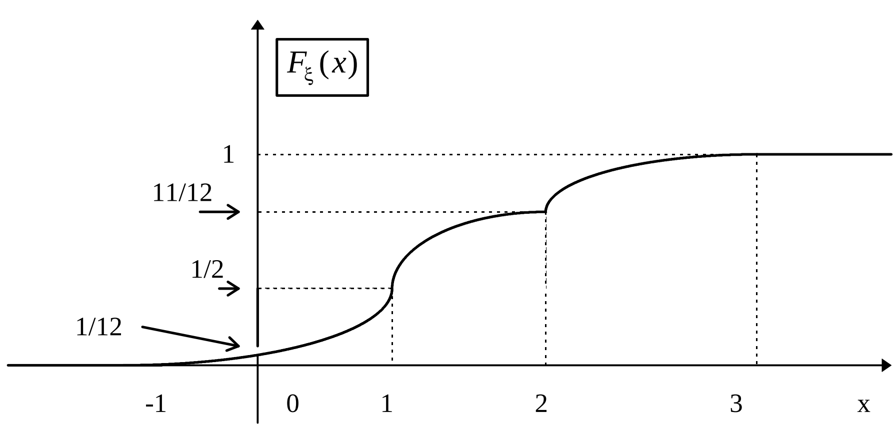
$$=\frac{11}{12}+\frac{1}{4}\int_{2}^{x}(x^2-6x+9)dx=\frac{11}{12}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x-\frac{8}{3}+12-18\right)=$$

$$=\frac{11}{12}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x-\frac{26}{3}\right)=\frac{x^3}{12}-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{26}{11}+\frac{11}{12}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x-5\right)$$

Per x>3 :

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x<-1\\ \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}\right)\ldots\ldots -1\le x<0\\ \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}\right)\ldots\ldots 0\le x<2\\ \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x-5\right)\ldots\ldots 2\le x<3\\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x\ge 3\end{cases}$$



Calcoliamo il valor medio :

$$\mu_\xi = E\{\xi\}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{4}x(x+1)^2dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{4}x(2-(x-1)^2)dx + \int_{2}^{3}\frac{1}{4}x(x-3)^2dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\int_{-1}^{0}(x^3+2x^2+x)dx + \int_{0}^{2}(-x^3+2x^2+x)dx + \int_{2}^{3}(x^3-6x^2+9x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{2} + \left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right)_{2}^{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{16}{4}+\frac{16}{3}+\frac{4}{2}+\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}-\frac{16}{4}+16-\frac{36}{2}\right] = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$\mu_\xi = 1.$

Questo lo si poteva dedurre dal fatto che $f_\xi(x)$ è simmetrica rispetto al valore x=1

Calcoliamo la varianza σ_ξ^2

$$\sigma_\xi^2 = E[(x-\mu_x)^2] = \frac{1}{4}\cdot\int_{-1}^{0}(x-1)^2(x+1)^2dx + \frac{1}{4}\cdot\int_{0}^{2}(x-1)^2(2-(x-1)^2)dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{2}^{3}(x-1)^2(x-3)^2dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0}(x^4-2x^2+1)dx + \int_{0}^{2}(x^2-2x+1)(-x^2+2x+1)dx + \int_{2}^{3}(x^2-2x+1)(x^2-6x+9)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0}(x^4-2x^2+1)dx + \int_{0}^{2}(-x^4+4x^3-4x^2+1)dx + \int_{2}^{3}(x^4-8x^3+22x^2-24x+9)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^5}{5}+x^4-\frac{4}{3}x^3+x\right)_{0}^{2} + \left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{22}{3}x^3-12x^2+9x\right)_{2}^{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1-\frac{32}{5}+16-\frac{32}{3}+2+\frac{243}{5}-162+198-108+27-\frac{32}{5}+32-\frac{176}{3}+48-18\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Quindi $\sigma_\xi^2 = \frac{1}{2}$

(*Esercizio 2 ; quarta parte*)

Questa parte dell'esercizio presupponeva che facesse uso del risultato più volte visto a lezione secondo cui , se $\eta = g(\xi) . con. g(\xi)$ funzione ' hard limiter '
Facendo riferimento alla figura relativa:

$$f_\eta(y) = F_\xi(0)\delta(y+b) + [1 - F_\xi(0)]\delta(y-b)$$

Per noi $F_\xi(0) = \frac{1}{12}$, quindi

$f_\eta(y) = \frac{1}{12}\delta(y+b) + \frac{11}{12}\delta(y-b)$

La variabile η è una variabile casuale discreta che può assumere solo i valori +b e -b con probabilità P{η=b}=11/12 e P{η=-b}=1/12 rispettivamente.
Perciò

$E[\eta] = \mu_\eta = \frac{11}{12}b - \frac{1}{12}b = \frac{5}{6}b$

Poiché si richiede che $\mu_\xi = \mu_\eta \Rightarrow 1 = \frac{5}{6}b \Rightarrow b = \frac{6}{5}$

Esercizio 3:

Parte 1)

Se A e B non sono disgiunti , A$\cap$B è l'unione tra A e quello che non sta in A sta in B .

Analogamente : $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

Perciò

P(A$\cup$B)=P(A)+P(Anegato$\cap$B) perché ho l'unione di eventi disgiunti

P(B)=P(A$\cap$B)+P(AnegatoB)+P(Anegato$\cap$B) $\Rightarrow$ P(Anegato$\cap$B)=P(B)-P(A$\cap$B) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P(A$\cup$B)=P(A)+P(B)-P(A$\cap$B) c.v.d.

Parte 2)
Condizione fondamentale per l'applicabilità del teorema della probabilità totale

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{n} P\{B, A_i\}$$

è che gli Ai costituiscano una partizione dello spazio ambiente , ovvero

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \\ A_i \cap A_j = 0..\forall .i \neq j \end{cases}$$

In queste condizioni posso scrivere che

$$\mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{S} = \mathrm{B} \cap \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A}_{\mathrm{i}} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_{\mathrm{i}})$$

per la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione
Gli eventi (BA) sono mutuamente esclusivi , pertanto posso scrivere :

$$\mathrm{P}\{\mathrm{B}\} = P\left\{\mathrm{B} \cap \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\left\{\mathrm{B} \cap \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{B, A_i\}$$

c.v.d.

Parte 3)
La funzione distribuzione cumulativa $F_\zeta(x)$ è definita essere non decrescente , ovvero

$$F_\zeta(x_1) \leq F_\zeta(x_2) \quad se \quad x_1 < x_2$$

Poiché la funzione densità di probabilità $f_\zeta(x)$ è definita come derivata della $F_\zeta(x)$

$$f_\zeta(x) \cong \frac{d}{dx} F_\zeta(x)$$

allora $f_\zeta(x)$ sarà necessariamente o positiva ($F_\zeta(x)$ strettamente crescente) o nulla ($F_\zeta(x)$ costante).
Quindi $f_\zeta(x)$ è non negativa . c.v.d.