Correzione esonero Teoria dei Segnali del 21-11-1994

Esercizio 1

Punto 1

Scriviamo l'espressione di $E\{y(t)\}$

$$E\{y(t)\} = E\{x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = E\{x(t)\}E\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = 0 \cdot E\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = 0$$

perché $x(t)$ e φ sono indipendenti.

$$\begin{aligned}
&E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)x(t+\tau)\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \varphi)\} = \\
&= E\{x(t)x(t+\tau)\}E\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \varphi)\} = \\
&= R_x(\tau)E\left\{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi + 2\pi f_0 (t+\tau) + \varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}R_x(\tau)\left[\cos(2\pi f_0 \tau) + E\{(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\varphi)\}\right]
\end{aligned}$$

$$E\{\cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\varphi)\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + \vartheta)\,d\vartheta = 0$$

Perciò

$$E\{y(t)y(t+\tau)\} = \frac{1}{2}R_x(\tau)\left[\cos(2\pi f_0 \tau)\right]$$

ovvero

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2}R_x(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Pertanto $y(t)$ è un processo casuale stazionario in senso lato, essendo $E\{y(t)\} = 0$ e $R_y(t, t+\tau) = R_y(\tau)$

notare come questo accada anche se $\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ non è stazionario in senso lato quando φ è distribuito solo tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$

Punto 2

$$G_y(f) = \Im\{R_y(\tau)\} = \Im\left\{\frac{1}{2}R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\right\} = \frac{1}{4}G_x(f - f_0) + \frac{1}{4}G_x(f + f_0)$$

dove $G_x(f) = \Im(R_x(\tau))$

Punto 3

Se $\varphi = 0$

$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$E\{y(t)\} = \cos(2\pi f_0 t)E\{x(t)\} = 0$

$E\{y^2(t)\} = E\{x^2(t)\cos^2(2\pi f_0 t)\} = \cos^2(2\pi f_0 t)E\{x^2(t)\} = R_x(0)\cos^2(2\pi f_0 t) = R_x(0)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right]$

Il valore massimo raggiunto è $R_x(0)$, quando $t = \dfrac{k}{2f_0}$

$R_x(0)$ corrisponde alla potenza media del processo $x(t)$

$$R_x(0) = P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 1$$

Pertanto $R_x(0) = 1$ è il valore massimo raggiunto.

<u>Esercizio 2</u>

$$y(t) = A + \int_B^{t+C} x(\tau)d\tau$$

Verifichiamo le tre condizioni richieste. Cominciamo con la linearità. Siano

$$y_1(t) = A + \int_B^{t+C} x_1(\tau)d\tau \quad \text{e} \quad y_2(t) = A + \int_B^{t+C} x_2(\tau)d\tau$$

le uscite per due ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rispettivamente.

Consideriamo ora $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ con $a,b \in \Re$

$$y(t) = A + \int_B^{t+C} x(\tau)d\tau = A + \int_B^{t+C} [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)]d\tau = A + a\int_B^{t+C} x_1(\tau)d\tau + b\int_B^{t+C} x_2(\tau)d\tau$$

Per avere la linearità deve essere $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$

$$A + a\int_B^{t+C} x_1(\tau)d\tau + b\int_B^{t+C} x_2(\tau)d\tau = aA + a\int_B^{t+C} x_1(\tau)d\tau + bA + b\int_B^{t+C} x_2(\tau)d\tau$$

$$A = aA + bA \qquad \forall a,b$$

L'ultima uguaglianza è soddisfatta per qualsiasi $a,b \in \Re$ solo se $A = 0$. Possiamo verificare l'invarianza con la scelta già determinata di $A = 0$.

$$y(t) = \int_B^{t+C} x(\tau)d\tau$$

Se poniamo in ingresso $x(t-\lambda)$ abbiamo

$$y(t) = \int_B^{t+C} x(\tau - \lambda)d\tau = \int_{B-\lambda}^{t-\lambda+C} x(\vartheta)d\vartheta$$

Ma

$$y(t-\lambda) = \int_B^{t-\lambda+C} x(\tau)d\tau$$

e le due espressioni coincidono solo se $B = B - \lambda$ per qualsiasi valore di $\lambda \in \Re$. Questo accade solo se $B = -\infty$

Verifichiamo ora la causalità del sistema con $A = 0$ e $B = -\infty$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+C} x(\tau)d\tau$$

Ci serve la risposta all'impulso $h(t)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t+C} \delta(\tau)d\tau = u(\tau)\Big|_{-\infty}^{t+C} = u(t+C)$$

dove $u(t)$ è la funzione gradino unitario. Allora:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < -C \\ 1 & t > -C \end{cases}$$

Il sistema è causale se $h(t)=0$ per t < 0. La condizione da soddisfare è allora $C \leq 0$.
Ricapitolando, il sistema è lineare,invariante e causale se $A=0$, $B=-\infty$ e $C \leq 0$.
In questo caso la risposta all'impulso è $h(t)=u(t+C)$

Esercizio 3

Cominciamo con l'espressione $n_u(t)$ in funzione di $n(t)$

$$n'(t)=n(t)*h_2(t)=n(t)*\left[\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-T)\right]=n(t)+\frac{1}{2}n(t-T)$$

$$n_u(t)=(n'(t))^2=\left[n(t)+\frac{1}{2}n(t-T)\right]^2=n^2(t)+\frac{1}{4}n^2(t-T)+n(t)n(t-T)$$

$$E\{n_u(t)\}=E\left\{n^2(t)+\frac{1}{4}n^2(t-T)+n(t)n(t-T)\right\}=E\{n^2(t)\}+\frac{1}{4}E\{n^2(t-T)\}+E\{n(t)n(t-T)\}=$$
$$=R_n(0)+\frac{1}{4}R_n(0)+R_n(T)=\frac{5}{4}R_n(0)+R_n(T)$$

essendo $R_n(t)$ la funzione di autocorrelazione del processo $n(t)$.

$$R_n(\ )=\Im^{-1}\{G_n(f)\}$$
$$G_n(f)=\frac{N_0}{2}\left|\Im\{h_1(t)\}\right|^2=\frac{N_0}{2}\left|\Im\{2BSinc(2Bt)\}\right|^2=\frac{N_0}{2}P_{2B}(f)$$

essendo $P_{2B}(f)=\begin{cases}1 & |f|<B\\ 0 & |f|>B\end{cases}$

Allora

$$R_n(\ )=\Im^{-1}\{G_n(f)\}=\Im^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}P_{2B}(f)\right\}=\frac{N_0}{2}2BSinc(2Bt)=N_0BSinc(2Bt)$$

Ricordiamo che

$$Sinc(t)=\frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$

Allora, se $B=\frac{3}{2T}$

$$R_n(0) = N_0 B sinc(0) = N_0 B = \frac{3N_0}{2T}$$

$$R_n(T) = N_0 B sinc(2BT) = N_0 B \frac{sin(2\pi BT)}{2\pi BT} = N_0 \frac{3}{2T} \frac{sin(3\pi)}{3\pi} = 0$$

Allora

$$E\{n_u(t)\} = \frac{5}{4} R_n(0) + R_n(T) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{N_0}{T} = \frac{15}{8} \cdot \frac{N_0}{T} \quad \text{per} \quad B = \frac{3}{2T}$$

Esercizio 4

Ricordiamo che $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$ con $f_0 = \frac{1}{T}$

Allora

$$P(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt$$

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{-j2\pi f_0 t} \right] dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* c_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$