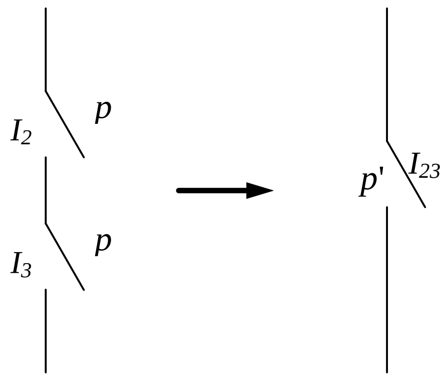
Correzione esonero del 2 novembre 1994

Esercizio 1

L'esercizio si risolve facilmente considerando $P_{CE} = 1 - \overline{P_{CE}}$ con $\overline{P_{CE}} = \{\text{probabilità che NON ci sia continuità elettrica}\}$

Per semplicità si considera la seguente equivalenza



NOTA: la probabilità che il ramo di I_3 e I_2 equivalga ad un interruttore aperto è:

P{I_2 aperto $\cup$ I_3 aperto} = P{ I_2 aperto } + P{ I_3 aperto }- P{ I_2 aperto $\cap$ I_3 aperto } = p + p - p^2

= 2p - p^2 = p'

Quindi

$$\overline{P_{CE}} = \{I_1 \text{ aperto} \cap I_{23} \text{ aperto} \cap I_4 \text{ aperto}\} = \sqrt{p} \cdot p' \cdot \sqrt{p} = p\left(2p - p^2\right)$$

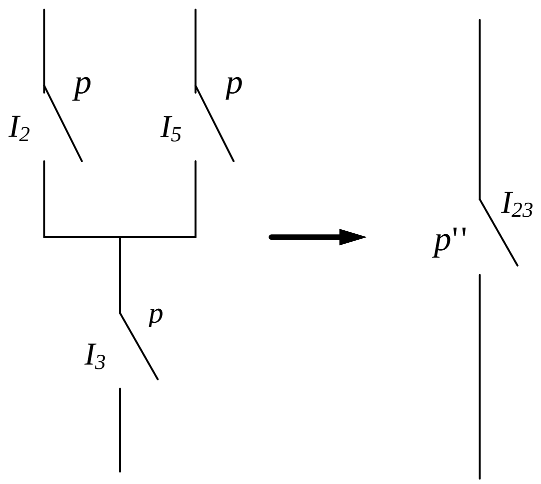
Inoltre si riportano i seguenti calcoli:

$$\frac{d}{dp}\overline{P_{CE}} = 4p - 3p^2 = p(4 - 3p)$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\overline{P_{CE}} = 4 - 6p \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \geq 0 & p \leq 2/3 \\ < 0 & p > 2/3 \end{cases}$$

Infine si osserva semplicemente che $P_{CE}(0) = 1$. Infatti, se p = 0 (interruttori sempre CHIUSI, la continuità elettrica è SEMPRE assicurata). Se p = 1 (interruttori SEMPRE aperti) non c'è mai continuità elettrica.

Aggiungendo ora un interruttore I_5 in parallelo ad I_2 si ha:



con $p'' = \mathrm{P}\{\ [\ I_2 \text{ aperto} \cap I_5 \text{ aperto}\ ] \cup I_3 \text{ aperto}\ \} = p^2 + p - p^3$

$$\overline{P_{CE}} = p \cdot p'' = p^2 + p^3 - p^4$$

$$P_{CE} = 1 - p^2 - p^3 + p^4 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \qquad con \qquad p = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

Per calcolare $F_\eta(y)$ si inverte $g(x)$:

$$g^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad x = \arccos(y)$$

e si determina $D_y = \{x : \cos(x) \leq y, \quad \forall y\}$

Il grafico dell'andamento di $f_\xi(x)$ lo si rimanda allo studente dallo stesso si ricava che:

$$D_y = [\arccos(y), \quad 2\pi \arccos(y)]$$

Si può allora calcolare:

$$F_\eta(y) = \int_{D_y} f_\xi(x)dx = \int_{\arccos(y)}^{2\pi-\arccos(y)} \frac{1}{2\pi}dx = \frac{2\pi - 2\arccos(y)}{2\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos(y) \qquad -1 \le y \le 1$$

Si calcola la densità di probabilità:

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy}F_y(y) = \frac{1/\pi}{\sqrt{1-y^2}} \qquad -1 \le y \le 1$$

Il valor medio di η è nullo. Infatti occorre calcolare il seguente integrale di una funzione dispari integrata tra -1 e +1

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\pi}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$

Infine,

$$P\{|\eta| \le k\} = P\{-k \le \eta \le k\} = \int_{-k}^{k} f_\eta(y)dy = 2\int_0^k f_\eta(y)dy = 2\left[F_\eta(k) - F_\eta(0)\right] = 2F_\eta(k) - 1 = \frac{1}{2}$$

Questo implica

$$F_\eta(k) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{\pi}\arccos(k) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \arccos(k) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 4

P{ popolare il laghetto } = 1 - P{ NON popolare il laghetto }

ma P{ NON popolare il laghetto } = P{ 5 trote maschio $\cup$ 5 trote femmine }= $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

P{ popolare il laghetto } = $\frac{15}{16}$

NOTA: In generale si può applicare Bernoulli $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ dove k = numero di maschi o femmine pescati.