Correzione esame del 19 gennaio 1995

Esercizio 1

Probabilità di uscita testa P(T) per il teorema della probabilità totale:

$$P(T) = P(T \mid M_1)\, P(M_1) + P(T \mid M_2)\, P(M_2) = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

Per la formula di Bayes:

$$P(M_1 \mid T) = \frac{P(T \mid M_2)\, P(M_2)}{P(T)} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}\, p_2}{\cancel{\tfrac{1}{2}}(p_1 + p_2)} = \frac{p_2}{(p_1 + p_2)}$$

Lo spazio campione delle uscite sperimentali è:

M_1	M_2	Probabilità dell'uscita
T	T	$p_1 p_2$
C	T	$(1-p_1)\, p_2$
T	C	$p_1 (1-p_2)$
C	C	$(1-p_1)(1-p_2)$

P(T*) = evento almeno una testa lanciando 2 monete = $p_1 p_2 + (1-p_1)\, p_2 + p_1 (1-p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

Esercizio 2

$$E\{ y(t)\, n(t+\tau) \} = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, n(t-\alpha)\, n(t+\tau)\, d\alpha \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, E\{ n(t-\alpha)\, n(t+\tau) \}\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \frac{N_0}{2} \delta(\tau+\alpha)\, d\alpha = \frac{N_0}{2} h(-\tau)$$

y(t) è un processo gaussiano. due campioni $\eta_1 = y(t_1)$ e $\eta_2 = y(t_2)$ sono statisticamente indipendenti se $\rho_{\eta_1 \eta_2} = 0$, cioè

$$E\{ y(t_1)\, y(t_2) \} = E\{ y(t_1) \}\, E\{ y(t_2) \} = 0$$

$$R_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)n(t-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)n(t+\tau-\beta)d\beta\right\} =$$

$$= \iint h(\alpha)h(\beta)\frac{N_0}{2}\delta(\tau-\beta+\alpha)d\alpha\, d\beta = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\tau+\alpha)d\alpha$$

Quest'ultimo integrale è sempre nullo per

$$|\tau| > T$$

Pertanto $y(t_1)$ e $y(t_2)$ sono statisticamente indipendenti se

$$t_1 = t$$
$$t_2 = t \pm \alpha T \quad \text{con} \quad \alpha > 1$$

Esercizio 3

Linearità (principio di sovrapposizione degli effetti)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y(t) = B + \int_c^t \left[A + (x_1(t) + x_2(t))^n\right]dt =$$

un primo requisito per garantire la linearità è avere $n = 1$ (l'elevamento a potenza non è lineare)

$$y(t) = B + \int_c^t \left[A + x_1(t) + x_2(t)\right]dt = B + \int_c^t A dt + \int_c^t x_1(t)dt + \int_c^t x_2(t)dt =$$

per garantire la linearità occorre che $B = A = 0$ in tal caso si ha:

$$y(t) = \int_c^t x_1(t)dt + \int_c^t x_2(t)dt = y_1(t) + y_2(t)$$

con

$$y_1(t) = \int_c^t x_1(t)dt \quad \text{e} \quad y_2(t) = \int_c^t x_2(t)dt$$

per invarianza per traslazioni temporali

$$y(t) = \int_c^t x(t)dt$$

applichiamo all'ingresso il segnale $x(t-\tau)$

$$y^*(t) = \int_{c-\tau}^{t-\tau} x(z)dz \neq y(t-\tau)$$

Perché valga l'uguaglianza $y^*(t) = y(t-\tau)$ l'estremo inferiore dell'integrale non deve variare dopo la trasformazione delle variabili $(t-\tau) = z$ e ciò si ottiene solo per $c = -\infty$. In definitiva:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

A=B=0 n=1 e $c \to -\infty$