Correzione esonero di Teoria dei Segnali del 18-1-1996

Esercizio 1

E’ dato il processo casuale

$$x(t) = \beta \cos^2\left(2\pi f_0 t + \vartheta\right)$$

Cominciamo a controllare se $x(t)$ è stazionario per ilvalor medio, ovvero

E{ x(t) } = costante

Ricordiamo che

$$f_\beta(b) = \begin{cases} 1/2 & \beta - 1 < b < 1 \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f\ \ (b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & -\dfrac{\pi}{2} < c < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Allora

$E\{x(t)\} = E\{\beta \cos^2(2\pi f_0 t + \vartheta)\} = E\{\beta\} E\{\cos^2(2\pi f_0 t + \vartheta)\}$ perché β e ϑ sono indipendenti.

Ma $E\{\beta\} = 0$ quindi $E\{x(t)\} = 0$ e il processo è stazionario per ilvalor medio.

Calcoliamo oral’autocorrelazione

$$R_x(t, t+\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{\beta \cos^2(2\pi f_0 t + \vartheta) \cdot \beta \cos^2(2\pi f_0 (t+\tau) + \vartheta)\} =$$

$$E\{\beta^2\} E\{\cos^2(2\pi f_0 t + \vartheta) \cos^2(2\pi f_0 (t+\tau) + \vartheta)\}$$

Ricordando che $\cos^2 A = ½ + ½ \cos(2A)$

$$R_x(t, t+\tau) = E\{\beta^2\} E\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\vartheta)\right] \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 (t+\tau) + 2\vartheta)\right]\right\} =$$

$$E\{\beta^2\} E\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(4\pi f_0 t + 2\vartheta) + \frac{1}{4}\cos(4\pi f_0 (t+\tau) + 2\vartheta) + \frac{1}{4}\cos(4\pi f_0 t + 2\vartheta)\cos(4\pi f_0 (t+\tau) + 2\vartheta)\right\} =$$

$$E\{\beta^2\}\frac{1}{4}E\left\{1+\cos(4\pi f_0 t+2\vartheta)+\cos(4\pi f_0(t+\tau)+2\vartheta)+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0(2t+\tau)+4\vartheta)\right\}=$$

$$=E\{\beta^2\}\frac{1}{4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}d\vartheta+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\cos(4\pi f_0\tau)d\vartheta\right)=E\{\beta^2\}\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\pi}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{\pi}\cos(4\pi f_0\tau)\right)=$$

$$=E\{\beta^2\}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0\tau)\right)=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0\tau)\right)=R_x(\tau)$$

e il processo $R_i x(t)$ è pertanto stazionario in senso lato.

In questo caso la potenza media del processo risulta essere:

$$P_x=R_x(0)=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}\cos 0\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{8}$$

<u>**Esercizio 2**</u>

Determiniamo la funzione di trasferimento del sistema. Abbiamo che:

Y(f) = H'(f) [X(f) - G(f) Y(f)] = H'(f) X(f) - G(f) H(f) Y(f)

Y(f) + Y(f) G(f) H'(f) = H'(f) X(f)

Y(f) [1 + G(f) H'(f)]= X(f) H'(f)

Per definizione

H(f) = Y(f) / X(f) = H'(f) / (1 + G(f) H'(f)

Per noi

H'(f) = $\Im\{h'(t)\}=\Im\{e^{-t}u'(t)\}=\dfrac{1}{1+j2\pi f}$

Allora

H(f) = $\dfrac{\frac{1}{1+i2\pi f}}{1+\frac{k}{1+i2\pi f}}=\dfrac{1}{(1+k)+j2\pi}$

Allora:

$$h(t)=\Im^{-1}\{H(f)\}=\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(1+k)+j2\pi f}\right\}=e^{-(1+k)t}u(t)$$

Per calcolare la banda equivalente di rumore del sistema, ricordiamo che

$$B_n=\frac{\cancel{N_0/2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,df}{\cancel{N_0/2}\cdot 2\cdot |H(f)|^2_{\max}}$$

Per noi $|H(f)|^2=\left|\frac{1}{(1+k)+j2\pi f}\right|^2=\frac{1}{(1+k)+j2\pi f}\cdot\frac{1}{(1+k)-j2\pi f}=\frac{1}{(1+k)^2+4\pi^2 f^2}$

$$|H(f)|^2_{\max}=|H(0)|^2=\frac{1}{(1+k)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+k)^2+4\pi^2 f^2}df=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\frac{(1+k)^2}{4\pi^2}+f^2}df=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+k}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{2(1+k)}$$

Allora

$$B_n=\frac{1}{4}(1+k)$$

è la banda equivalente di rumore del sistema.

Ponendo in ingresso un rumoregaussiano bianco n(t) con $G_n(f)=\frac{N_0}{2}$ abbiamo in uscita

$$G_{n'}(f)=G_n(f)|H(f)|^2=\frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{(1+k)^2+4\pi^2 f^2}$$

Allora

$$R_{n'}(\tau)=\Im^{-1}\{G_{n'}(f)\}=\Im^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{(1+k)^2+4\pi^2 f^2}\right\}=\Im^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\cdot\frac{2(1+k)}{2(1+k)}\cdot\frac{1}{(1+k)^2+4\pi^2 f^2}\right\}=$$
$$\frac{N_0}{4(1+k)}\cdot e^{-(1+k)|t|}$$

e la varianza din’(t) è

$$\sigma^2_{n'}=R_{n'}(0)=\frac{N_0}{4(1+k)}$$

Esercizio 3

Punto 1

La trasformazione diFourier è definita come

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f}\,dt$$

ma può anche essere scritta, usando la formula dEulero, come

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\cos(2\pi ft)-jsin(2\pi ft)\right]dt$$

ovvero

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt-j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sin(2\pi ft)dt$$

A questo punto supponiamo x(t) reale e dispari, ovvero x(t) = - x(- t).
Abbiamo pertanto che

$x(t)\cos(2\pi ft)$ è una funzione reale dispari

$x(t)sin(2\pi ft)$ è una funzione reale pari

Sappiamo che se integriamo una funzione reale dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, l'integrale è zero.
Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt=0$$

Perciò

$$X(f)=-j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sin(2\pi ft)dt$$

e X(f) è sicuramente una funzione immaginaria.
Proviamo che è anche dispari

$$X(-f)=-j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sin(-2\pi ft)dt=-j\int_{-\infty}^{+\infty} -x(t)sin(2\pi ft)dt=+j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sin(-2\pi ft)dt=-X(f)$$

e quindi X(f) è dispari.

Punto 2

Perché un sistema sia fisicamente realizzabile è necessario che sia causale e la risposta all'impulso sia ad energia finita.

$h(t) = u(t)e^{t}$ è causale, infatti $h(t) = 0$ per t < 0

ma non è ad energia finita.
Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} e^{2t} dt = +\infty$$