Correzione esonero del 16 novembre 1994

Esercizio 1

Punto 1

Attraverso il teorema della probabilità totale, possiamo scrivere

$$F_\eta(y) = P\{\eta \le y\} = P\{\eta \le y | \xi = -1\} P\{\xi = -1\} + P\{\eta \le y | \xi = +1\} P\{\xi = +1\}$$

$$P\{\xi = -1\} = P\{\xi = +1\} = \frac{1}{2} \quad \text{come affermano i dati del problema}$$

Ricordando che $\eta = \xi + \zeta$, scriviamo

$$F_\eta(y) = \frac{1}{2} P\{-1 + \zeta \le y\} + \frac{1}{2} P\{1 + \zeta \le y\} = \frac{1}{2} P\{\zeta \le y + 1\} + \frac{1}{2} P\{\zeta \le y - 1\} = \frac{1}{2} F_\zeta(y+1) + \frac{1}{2} F_\zeta(y-1)$$

Da questa espressione otteniamo

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = \frac{1}{2} f_\zeta(y+1) + \frac{1}{2} f_\zeta(y-1)$$

ovvero

$$f_\eta(y) = \frac{1}{4} \alpha\, e^{-\alpha|y+1|} + \frac{1}{4} \alpha\, e^{-\alpha|y-1|}$$

Punto 2

$$P\{\xi = +k, \eta \le y\} = P\{\eta \le y | \xi = k\} P\{\xi = k\}$$

Per $k = +1$ si ottiene

$$P\{\xi = 1, \eta \le y\} = P\{\eta \le y | \xi = +1\} P\{\xi = +1\} = \frac{1}{2} P\{1 + \xi \le y\} = \frac{1}{2} P\{\xi \le y - 1\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{y-1} \frac{1}{2} \alpha\, e^{-\alpha|z|} dz$$

Qui bisogna discutere il caso in cui y - 1 > 0 o y - 1 < 0

Se y < 1

$$P\{\xi = 1, \eta \le y\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{y-1} \frac{1}{2} \alpha\, e^{+\alpha z} dz = \frac{1}{4} e^{+\alpha z} \Big|_{-\infty}^{y-1} = \frac{1}{4} e^{+\alpha(y-1)}$$

Se y > 1

$$P\{\xi=1,\,\eta\le y\}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\alpha\, e^{+\alpha z}dz+\frac{1}{2}\int_{0}^{y-1}\frac{1}{2}\alpha\, e^{-\alpha z}dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\alpha z}\right)_{0}^{y-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-\alpha(y-1)}$$

Perciò

$$P\{\xi=1,\,\eta\le y\}=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{\alpha(y-1)} & y<1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-\alpha(y-1)} & y>1\end{cases}$$

Procedendo con i calcoli in maniera analoga per $\xi=-1$ si ottiene

$$P\{\xi=1,\,\eta\le y\}=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{\alpha(y+1)} & y<-1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-\alpha(y+1)} & y>-1\end{cases}$$

Punto 3

Scriviamo formalmente il problema a posteriori

$$P\{\xi=1,\,\eta>0\}=\frac{P\{\eta>0|\xi=1\}P\{\xi=1\}}{P\{\eta>0\}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P\{\eta>0\}}\cdot\left(1-P\{1+\xi<0\}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P\{\eta>0\}}\left(1-\int_{-\infty}^{-1}\tfrac{1}{2}\alpha\, e^{\alpha z}dz\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}e^{-\alpha}}{P\{\eta>0\}}$$

$$P\{\xi=-1,\,\eta>0\}=\frac{P\{\eta>0|\xi=-1\}P\{\xi=-1\}}{P\{\eta>0\}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P\{\eta>0\}}\cdot\left(1-P\{\xi-1<0\}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P\{\eta>0\}}\left(1-\int_{-\infty}^{0}\tfrac{1}{2}\alpha\, \mathrm{e}^{\alpha z}dz-\int_{0}^{1}\tfrac{1}{2}\alpha\, e^{-\alpha z}dz\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P\{\eta>0\}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}e^{-\alpha}}{P\{\eta>0\}}$$

Scriviamo ora

$$P\{\xi=1,\eta>0\}-P\{\xi=-1,\eta>0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}e^{-\alpha}}{P\{\eta>0\}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}e^{-\alpha}}{P\{\eta>0\}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P\{\eta>0\}}\cdot\left(1-e^{-\alpha}\right)>0 \quad \text{sempre}$$

Allora $\xi=+1$ è più probabile.

Punto 4

$$P\{1R|-1T\}= P\{\eta > 0|\xi = -1\}= P\{-1+\xi > 0\}= P\{\xi > 1\}= \int_{1}^{+\infty} \alpha/2\, e^{-\alpha z} dz = \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

$$P\{-1R|1T\}= P\{\eta < 0|\xi = 1\}= P\{1+\xi < 0\}= P\{\xi < -1\}= \int_{-\infty}^{-1} \alpha/2\, e^{\alpha z} dz = \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

Esercizio 2

Punto 1

Risolviamo il punto 1 con il metodo della funzione di distribuzione cumulativa.

Se

$$y > 1 \quad \Rightarrow \quad P\{y \le g(x)\}= 1 \quad \Rightarrow \quad F_\eta(y)= 1$$

Se

$$y < 1 \quad \Rightarrow \quad P\{y \le g(x)\}= P\{x < y-1\}+ P\{x > 1-y\} \quad \Rightarrow \quad F_\eta(y)= F_\xi(y-1)+1- F_\xi(1-y)$$

con

$$g(x)= \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 1-x & x > 0 \end{cases}$$

Quindi

$$F_\eta(y)= \begin{cases} F_\xi(y-1)+1- F_\xi(1-y) & y < 1 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

e

$$f_\eta(y)= \begin{cases} f_\xi(y-1)+ f_\xi(1-y) & y < 1 \\ 0 & y > 0 \end{cases}$$

Dal momento che x è distribuita uniformemente tra -a e +a,

$$f_\eta(y)= \frac{1}{2a}[u(x+a)-u(x-a)]= \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \le x \le a \\ 0 & altrove \end{cases}$$

essendo $u(x)$ la funzione gradino unitario.

$$f_\xi(y-1)= \begin{cases} \frac{1}{2a} & 1-a \le y \le 1+a \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$f_\xi(1-y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & 1-a \le y \le 1+a \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Sia $f_\xi(1-y)$ che $f_\xi(y-1)$ sono definite per $1-a \le y \le 1+a$.

Allora

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{a} & 1-a \le y \le 1+a, \quad y < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

ovvero

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & 1-a \le y \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

perché y è comunque sempre minore di 1

Punto 2

$$E[\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x) dx = \int_{-a}^{0} (x+1)\frac{1}{2a} dx + \int_{0}^{a} (1-x)\frac{1}{2a} dx =$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{-a}^{0} + \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)_{0}^{a}\right] = \frac{1}{2a}\left(2a - a^2\right) = \frac{1}{2}(2-a)$$

$$E[\eta] = \frac{1}{2}(2-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Esercizio 3

Sia N_1 il numero di palline nel sacchetto 1, N_2 quello del sacchetto 2, N_{1b} il numero di palline blu del sacchetto 1 e N_{2b} quello del sacchetto 2.
Allora ho che gli eventi A e B sono indipendenti se:

$$P\{B|A\} = P\{B\}$$
$$P\{B\} = \frac{\text{numero totale di palline blu}}{\text{numero totale di palline}} = \frac{N_{1b} + N_{2b}}{N_1 + N_2}$$

$$P\{B|A\} = \frac{N_{1b}}{N_\backslash}$$

$$\frac{N_{1b}+N_{2b}}{N_1+N_2}=\frac{N_{1b}}{N_1}$$

$$N_{1b}\cdot N_1+N_1\cdot N_{2b}=N_1\cdot N_{1b}+N_2\cdot N_{1b}$$

$$N_1\cdot N_{2b}=N_2\cdot N_{1b}$$

ovvero dividendo per $N_1\cdot N_2$

$$\frac{N_{1b}}{N_1}=\frac{N_{2b}}{N_2}$$

Esercizio 4

Punto 1

L'operazione di condizionamento corrisponde al restringimento dello spazio ambiente, quindi ad un aumento del valore della probabilità dell'evento.
L'uguaglianza si ottiene quando gli eventi A ed M sono indipendenti. Infatti, in questo caso,

$$P\{A|M\}=\frac{P\{A,M\}}{P\{M\}}=\frac{P\{A\}\cdot P\{M\}}{P\{M\}}=P\{A\}$$

Punto 2

I due metodi a disposizione sono il metodo della funzione di distribuzione ed il metodo del teorema fondamentale. Nel primo metodo, per ogni valore di y si determinano quali sono gli intervalli della x per cui $y\le g(x)$ e si scrive l'espressione di $F_\eta(y)=P\{x\in D| y\le g(x)\}$. La funzione $f_\eta(y)$ si può poi ottenere per derivazione da $F_\eta(y)$.
Nel secondo metodo, per un dato y si risolve l'equazione y = g(x), determinando un certo numero di zeri x_1, x_2, ... x_m.
Allora

$$f_\eta(y)=\sum_{i=1}^{m}\frac{F_\eta(y)}{|g(x)|}$$