Correzione dell'esame del 12 dicembre 1995

Esercizio 1

Cominciamo con il ragionamento dalla fine . Nella terza urna ci saranno 4 palline, blu o rosse, ma non so quante di ogni colore.
Allora , per il teorema della probabilità totale :

P {blu } = P { estrarre una pallina blu | ci sono 4 palline blu } * P{ ci sono 4 palline blu }+ P{ estrarre blu | ci sono 3 blu ed 1 rossa } * P{ ci sono 3 blu ed 1 rossa} + P { estrarre blu | ci sono 2 blu e 2 rosse } * P{ ci sono 2 blu e 2 rosse }+ P { estrarre blu | ci sono 1 blu e 3 rosse }* P { ci sono 1 blu e 3 rosse} + P { estrarre blu | ci sono 4 rosse }* P{ ci sono 4 rosse }

Posso abbreviare la notazione precedente con:

P{.b}. =P{.b|bbb.}P{.bbbb}.+P{.b|bbbr}.P{.bbbr}. + P{.b|bbrr.} P{.bbrr.} +P.{b|brrr.} P{.brrr} . + P{.b|rrrr }. P{.rrrr}.

Calcoliamo ora le probabilità degli eventi condizionanti . Per fare questo , calcoliamo la probabilità di ogni coppia di palline per ogni urna .

Urna 1

usiamo la formula ipergeometrica vista a lezione

$$P\{b, b\} = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

$$P\{b, r\} = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$$

$$P\{r, r\} = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15}$$

Urna 2

$$P\{b,b\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

$$P\{b,r\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{9}{15} \quad .$$

$$P\{r,r\} = \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

Gli eventi condizionati sono costituiti da coppie di questi eventi:

$P\{bbbb\} = P\left\{b_1 b_1 \cap b_2 b_2\right\} =$.P {. due palline blu dalla 1° urna e due dalla 2° .}

Le scelte dalle due urne si possono considerare indipendenti , quindi

$$P\{bbbb\} = P\left\{b_1 b_1\right\} \cdot P\left\{b_2 b_2\right\} = \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{15} = \frac{3}{225}$$

Analogamente

$$P\{rrrr\} = P\left\{r_1 r_1\right\} \cdot P\left\{r_2 r_2\right\} = \frac{6}{15}\cdot\frac{3}{15} = \frac{18}{225}$$

$$P\{bbbr\} = P\left\{b_1 b_1\right\} P\left\{b_2 r_2\right\} + P\left\{b_1 r_1\right\} P\left\{b_2 b_2\right\} = \frac{1}{15}\cdot\frac{9}{15} + \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{15} = \frac{33}{225}$$

$$P\{brrr\} = P\left\{b_1 r_1\right\} P\left\{r_2 r_2\right\} + P\left\{r_1 r_1\right\} P\left\{b_2 r_2\right\} = \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{15} + \frac{6}{15}\cdot\frac{9}{15} = \frac{78}{225}$$

$$P\{bbrr\} = P\left\{b_1 b_1\right\} P\left\{r_2 r_2\right\} + P\left\{r_1 r_1\right\} P\left\{b_2 b_2\right\} + P\left\{r_1 b_1\right\} P\left\{r_2 b_2\right\} = \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{15} + \frac{6}{15}\cdot\frac{3}{15} + \frac{8}{15}\cdot\frac{9}{15} = \frac{93}{225}$$

Infine:

$$P\{b|bbbb\}=1$$

$$P\{b|bbbr\}=\frac{3}{4}$$

$$P\{b|bbrr\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{b|brrr\}=\frac{1}{4}$$

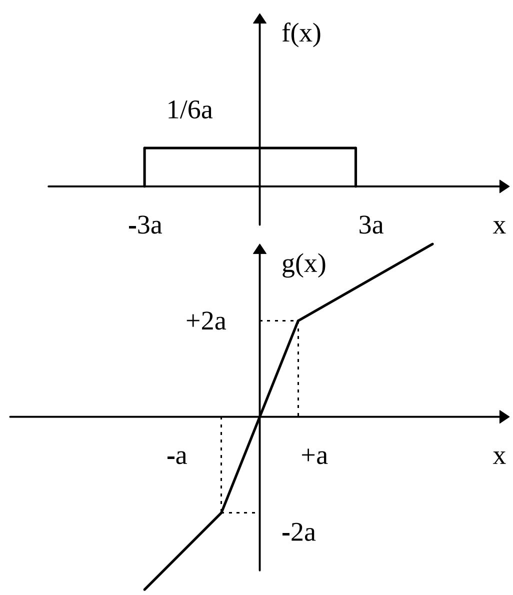
$$P\{b|rrrr\}=0$$

Perciò:

$$P\{b\}=1\cdot\frac{3}{225}+\frac{3}{4}\cdot\frac{33}{225}+\frac{1}{2}\cdot\frac{93}{225}+\frac{1}{4}\cdot\frac{78}{225}+0\cdot\frac{18}{225}=\frac{375}{900}=\frac{5}{12}\ .$$

Esercizio 2

Dai dati del problema



$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{6a}.....-3a\le x\le 3a\\ 0.........altrove\end{cases}$$

.

$$g(x)=\begin{cases}x-a.....x\le -a\\ 2x.........-a<x\le a\\ x+a......x>a\end{cases}$$

Per calcolare le caratteristiche diY=g(x) ricorriamo al metodo della funzione di distribuzione cumulativa .

Se

$$y \geq 2a \ldots\ldots P\{g(x) \leq y\} = P\{x \in D_1\}. dove. D_1 = (-\infty, y-a)$$

Allora

$$F_Y(y) = P\{g(x) \leq y\} = P\{x \leq y-a\} = F_x(y-a)$$

Se

$$-2a \leq y < a \ldots F_Y(y) = P\{g(x) \leq y\} = P\left\{x \leq \frac{y}{2}\right\} = F_x\left(\frac{y}{2}\right)$$

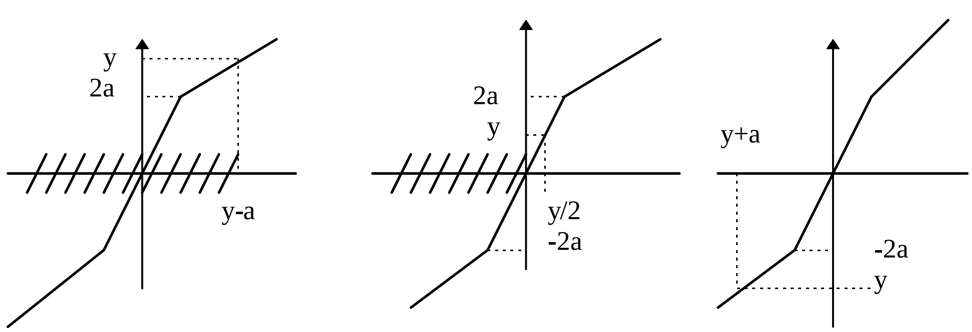
Se

$$y < -2a \ldots\ldots F_Y(y) = P\{x \leq y+a\} = F_x(y+a)$$

Allora

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_x(y+a) \ldots\ldots\ldots y < -2a \\ F_x\left(\frac{y}{2}\right) \ldots\ldots -2a \leq y < 2a \\ F_x(y-a) \ldots\ldots y \geq 2a \end{cases}$$

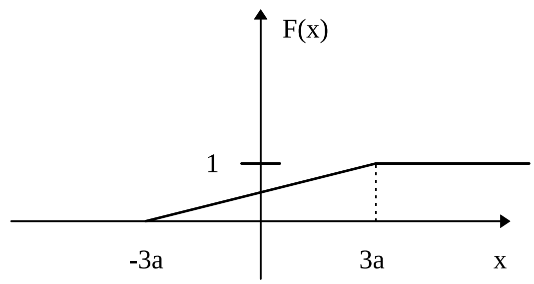
Grafici relativi alla F(y)



Inoltre :

$$F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{d}{dy}F_x(y+a) = f_x(y+a) \ldots\ldots\ldots y \le -2a \\ \dfrac{d}{dy}F_x\left(\dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{1}{2} f_x\left(\dfrac{y}{2}\right) \ldots\ldots\ldots -2a < y \le 2a \\ \dfrac{d}{dy}F_x(y-a) = f_x(y-a) \ldots\ldots\ldots\ldots y > 2a \end{cases}$$

Poiché :



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \le -3a \\ \dfrac{1}{6a} \cdot x + \dfrac{1}{2} \ldots\ldots -3a < x \le 3a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x > 3a \end{cases}$$

risulta :

per $y \le -2a$

$$F_Y(y) = F_X(y+a) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y + a \le -3a \\ \dfrac{1}{6a}(y+a) + \dfrac{1}{2} \ldots\ldots -3a < y + a \le 3a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y + a > 3a \end{cases}$$

ovvero:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y \le 4a \\ \dfrac{1}{6a} \cdot y + \dfrac{2}{3} \cdot a \ldots\ldots\ldots -4a < y \le 2a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y > 2a \end{cases}$$

(ma questo vale solo per y < -2a)

Per $-\ 2a < y \leq 2a$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} F_X\left(\frac{y}{2}\right) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{y}{2} \leq -3a \\ \frac{1}{12a} y + \frac{1}{2} \ldots\ldots -3a < \frac{y}{2} \leq 3a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{y}{2} > 3a \end{cases} \ldots = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y \leq -6a \\ \frac{1}{12a} y + \frac{1}{2} \ldots\ldots -6a < y \leq 6a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y > 6a \end{cases}$$

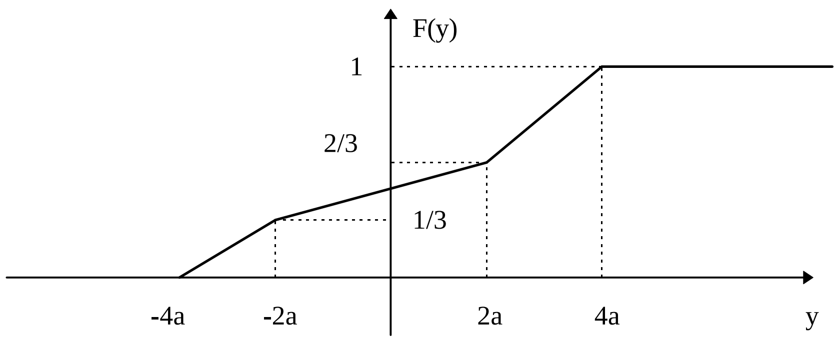
Per y > 2a :

$$F_Y(y) = F_X(y - a) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots y \leq -2a \\ \frac{1}{6a} y + \frac{1}{3} \ldots\ldots -2a < y \leq 4a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y > 4a \end{cases}$$

Mettendo insieme i diversi intervalli :

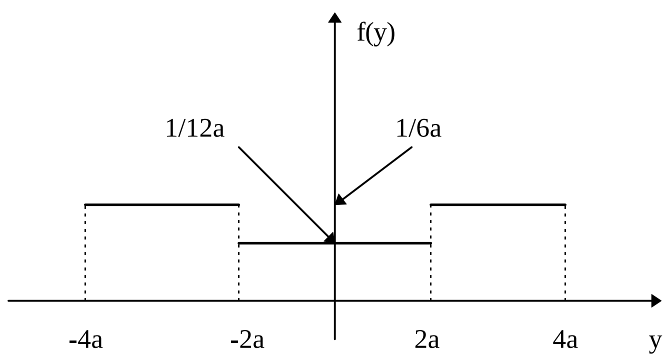
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y \leq -4a \\ \frac{1}{6a} y + \frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots -4a < y \leq -2a \\ \frac{1}{12a} y + \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots -2a < y \leq 2a \\ \frac{1}{6a} y + \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots 2a < y \leq 4a \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y > 4a \end{cases}$$

Con l'andamento sotto indicato :



Derivando F(y) o usando direttamente f(x) si ottiene :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots y \le -4a \\ \dfrac{1}{6a} \ldots\ldots\ldots -4a < y \le -2a \\ \dfrac{1}{12a} \ldots\ldots\ldots -2a < y \le 2a \\ \dfrac{1}{6a} \ldots\ldots\ldots 2a < y \le 4a \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y > 4a \end{cases}$$



Il valor medio di Y é :

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \int_{-4a}^{-2a} \frac{1}{6a}\, ydy + \int_{-2a}^{+2a} \frac{1}{12a}\, ydy + \int_{2a}^{4a} \frac{1}{6a}\, ydy =$$

$$= \left[\frac{1}{6a} \cdot \frac{y^2}{2}\right]_{-4a}^{-2a} + \left[\frac{1}{12a} \cdot \frac{y^2}{2}\right]_{-2a}^{+2a} + \left[\frac{1}{6a} \cdot \frac{y^2}{2}\right]_{2a}^{4a} =$$

$$= \frac{1}{6a} \cdot \left(\frac{1}{2}\, 4a^2 - \frac{1}{2}\, 16a^2\right) + \frac{1}{12a} \cdot \left(\frac{4a^2}{2} - \frac{4a^2}{2}\right) + \frac{1}{6a} \cdot \left(\frac{16a^2}{2} - \frac{4a^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\, 12a^2 + 12a^2\right) = 0$$

Allora :

E{Y}=0

Questo risultato si poteva ottenere subito considerando che $f_Y(y)$ é una funzione pari .

$$\sigma_Y^2 = E\left\{Y^2\right\} - E\{Y\}^2 = E\left\{Y^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy =$$

$$= \int_{-4a}^{-2a} \frac{1}{6a} \cdot y^2 dy + \int_{-2a}^{2a} \frac{1}{12a} \cdot y^2 dy + \int_{2a}^{4a} \frac{1}{6a} \cdot y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{6a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-4a}^{-2a} + \frac{1}{12a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-2a}^{2a} + \frac{1}{6a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{2a}^{4a} =$$

$$=$$

$$= \frac{1}{6a} \cdot \left[-\frac{8a^3}{3} + \frac{64a^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8a^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8a^3}{3} + \frac{64a^3}{3} - \frac{8a^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{6a} \cdot \frac{120a^3}{3} = \frac{20}{3}\, a^2$$

Esercizio 3

Quesito 1:

Ipotesi : $P(A|\, B) = P(A|\, \overline{B})$

Se consideriamo che B e B-segnato sono eventi disgiunti e che B+B-segnato =S , ovvero che B e B-segnato costituiscono una partizione di S , possiamo scrivere :

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) =$$
$$= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B) \cdot P(\overline{B}) =$$
$$= P(A|B) \cdot [P(B) + P(\overline{B})] = P(A|B)$$

Allora:

$$P(A) = P(A|B)$$

Ma

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}, \text{ quindi}$$
$$P(A) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \Rightarrow P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$$

e A e B sono eventi indipendenti c.v.d.

Quesito 2 :

Ipotesi : $F_x(x_0) = 0$

Dalle proprietà della funzione cumulativa sappiamo che : $0 \leq F_x(x) \leq 1$ per qualunque x (1) e che $F_x(x_1) \leq F_x(x_2), se, x_1 < x_2$

Allora , se per qualsiasi $x < x_0 . é. F_x(x) \leq F_x(x_0) = 0 \Rightarrow F_x(x) \leq 0, per, x < x_0$
F(x) deve essere minore o uguale a 0 per questa ultima relazione ma deve anche essere maggiore o uguale a 0 per la (1) . Ne segue che$F_x(x) = 0, per, x < x_0$ c.v.d.