Soluzione Esonero del 12 gennaio 1996

Esercizio 1

Punto 1

La variabile x può assumere i valori -2, 0, +2 con probabilità $\frac{1}{3}$. quindi

$$f_X(x) = \frac{1}{3}\delta(x+2) + \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{1}{3}\delta(x-2)$$

La variabile N è distribuita uniformemente tra $-\frac{4}{3}$ e $\frac{4}{3}$, quindi:

$$f_N(n) = \begin{cases} \frac{3}{8} & -\frac{4}{3} < n < \frac{4}{3} \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La variabile casuale Z è Z=X+N

Poiché X e N sono statisticamente indipendenti, possiamo sfruttare il risultato noto che ci dice che la funzione densità di probabilità della variabile casuale somma di due variabili casuali statisticamente indipendenti è data dal prodotto di convoluzione delle funzioni densità di probabilità delle due variabili.
Perciò:

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_N(z) = f_N(z) * \left[\frac{1}{3}\delta(z+2) + \frac{1}{3}\delta(z) + \frac{1}{3}\delta(z-2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} f_N(z+2) + \frac{1}{3} f_N(z) + \frac{1}{3} f_N(z-2)$$

Questo equivale a sommare tre copie della funzione $f_N(\bullet)$, una centrata in -2, una centrata in 0 ed una centrata in +2, e dividere il risultato per 3. Questa operazione corrisponde a quanto segue:

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<-10/3 \\ \frac{1}{8} & -\frac{10}{3}<z<-\frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{4}{3}<z<-\frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} & -\frac{2}{3}<z<\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}<z<\frac{4}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{4}{3}<z<\frac{10}{3} \\ 0 & z>\frac{10}{3} \end{cases}$$

Possiamo inoltre verificare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)dz = 1$

Punto 2

Perché y_1, y_2, y_3 siano equiprobabili, ovvero abbiano probabilità $1/3$, è necessario fissare a perché:

P{z < -a}=P{-a < z < +a}=P{z > a}=1/3

Questo equivale alla condizione

$$\int_{-\infty}^{-a} f_Z(z)dz = \int_{-a}^{+a} f_Z(z)dz = \int_{a}^{+\infty} f_Z(z)dz = \frac{1}{3}$$

A questo punto possiamo notare che $f_Z(z)$ è una funzione pari, per cui è sempre

$$\int_{-\infty}^{-a} f_Z(z)dz = \int_{a}^{+\infty} f_Z(z)dz$$

Per determinare a ci basta trovare il valore per cui

$$\int_{-a}^{+a} f_Z(z)dz = \frac{1}{3}$$

e le restanti condizioni risulteranno automaticamente verificate.

Quindi risolviamo l'equazione:

$$\int_{-a}^{+a} f_Z(z)dz = \frac{1}{3}$$

Ricorrendo ancora alla parità $f_Z(z)$, abbiamo

$$\int_{-a}^{+a} f_Z(z)dz = 2\int_{0}^{+a} f_Z(z)dz = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{0}^{+a} f_Z(z)dz = \frac{1}{6}$$

Cominciamo a considerare i vari casi.

Se $0 < a < 2/3$

$$\int_{0}^{a} f_Z(z)dz = \int_{0}^{a} \frac{1}{8}dz = \frac{a}{8} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{4}{3}$$

ma la condizione era $0 < a < 2/3$ quindi non è la soluzione giusta.

Se $2/3 < a < 4/3$

$$\int_{0}^{a} f_Z(z)dz = \int_{0}^{2/3} \frac{1}{8}dz + \int_{2/3}^{a} \frac{1}{4}dz = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\left(a \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{12} + \frac{a}{4} - \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{a}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$

a = 1 è un valore ammissibile, poiché ricade nell'intervallo $2/3 < a < 4/3$

L'ultima possibilità è $4/3 < a < 10/3$ per cui

$$\int_{0}^{a} f_Z(z)dz = \int_{0}^{2/3} \frac{1}{8}dz + \int_{2/3}^{4/3} \frac{1}{4}dz + \int_{4/3}^{a} \frac{1}{8}dz = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdot\left(a - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}a - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8}a = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{3}a = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2}{3}$$

Ma $a = 2/3$ non è nell'intervallo $4/3 < a < 10/3$ e quindi non è un valore possibile.

L'unica possibilità è perciò costituita da a = 1, che è il valore richiesto. Possiamo verificare che:

$$\int_{-\infty}^{-1} f_Z(z)dz = \int_{-1}^{+1} f_Z(z)dz = \int_{1}^{+\infty} f_Z(z)dz = \frac{1}{3}$$

Punto 3

Nel caso a = 1, dobbiamo caratterizzare il canale ternario discreto equivalente. Per farlo ci basta dare le probabilità di transizione del canale, ovvero

$$P\{ y_i \mid x_j \},\ \text{per ogni } i, j = 1, 2, 3$$

Allora

$$P\{ y_1 \mid x_1 \} = P\{ 2 < -1 \mid x = -2 \} = P\{ x + N < -1 \mid x = -2 \} = P\{ N < 1 \mid x = -2 \} = P\{ N < 1\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} f_N(n)dn = \int_{-4/3}^{1} \frac{3}{8}dn = \frac{3}{8}\cdot\left(1+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{8}$$

$$P\{ y_2 \mid x_1 \} = P\{ -1 < z < 1 \mid x = -2 \} = P\{ -1 < x + N < 1 \mid x = -2 \} = P\{ -1 < N - 2 < 1 \mid x = -2 \} =$$

$$P\{ 1 < N < 3 \} = \int_{1}^{3} f_N(n)dn = \int_{1}^{4/3} \frac{3}{8}dn = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right) = \frac{1}{8}$$

$$P\{ y_3 \mid x_1 \} = P\{ z > 1 \mid x = -2 \} = P\{ x + N > 1 \mid x = -2 \} = P\{ N - 2 > 1 \mid x = -2 \} =$$

$$P\{ N > 3 \} = 0$$

$$P\{ y_1 \mid x_2 \} = P\{ z < -1 \mid x = 0 \} = P\{ x + N < -1 \mid x = 0 \} = P\{ N < -1 \} =$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f_N(n)dn = \int_{-4/3}^{-1} \frac{3}{8}dn = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right) = \frac{1}{8}$$

$$P\{ y_2 \mid x_2 \} = P\{ z - 1 < z < 1 \mid x = 0 \} = P\{ -1 < x + N < 1 \mid x = 0 \} = P\{ -1 < N < 1 \} =$$

$$= \int_{-1}^{1} f_N(n)dn = \int_{-1}^{1} \frac{3}{8}dn = \frac{3}{8}\cdot 2 = \frac{3}{4}$$

$$P\{ y_3 \mid x_2 \} = P\{ z > 1 \mid x = 0 \} = P\{ N > 1 \} = \int_{1}^{4/3} \frac{3}{8}dn = \frac{1}{8}$$

$$P\{\ y_1 \mid x_3\ \} = P\{\ z < -1 \mid x = +2\ \} = P\{\ N + 2 < -1\ \} = P\{\ N < -3\ \} = 0$$

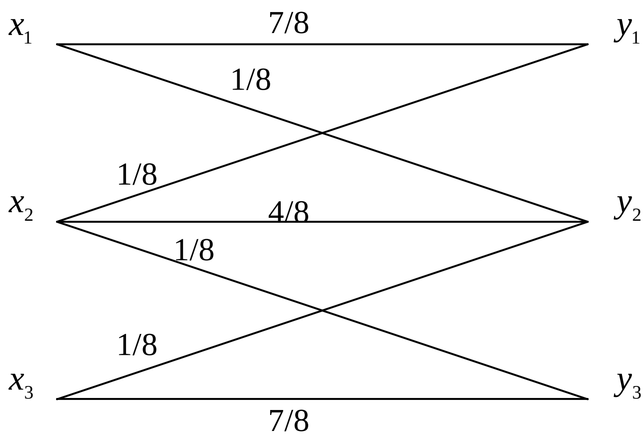
$$P\{\ y_2 \mid x_3\ \} = P\{\ -1 < z < 1 \mid x = +2\ \} = P\{\ -1 < N + 2 < 1\ \} = P\{\ -3 < N < -1\ \} =$$

$$\int_{-3}^{-1} f_N(n)dn = \int_{-4/3}^{-1} \frac{3}{8} dn = \frac{1}{8}$$

$$P\{\ y_3 \mid x_3\ \} = P\{\ z > 1 \mid x = +2\ \} = P\{\ N + 2 > 1\ \} = P\{\ N > -1\ \} =$$

$$\int_{-1}^{4/3} f_N(n)dn = \int_{-1}^{4/3} \frac{3}{8} dn = \frac{7}{8}$$

Perciò il canale equivalente risultante risulta essere il seguente:



Esercizio 2

Ai fini della soluzione, il mazzo di carte risulta composto da 4 carte favorevoli (F) e 6 carte sfavorevoli (S). L'obiettivo è quello di ottenere il maggior numero possibile di carte favorevoli.

Nella prima fase prendo tre carte e ho, utilizzando la formula ipergeometrica:

$$P(3F) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \cdot 1}{120} = \frac{4}{120}$$

$$P(2F)=\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{6\cdot 6}{120}=\frac{36}{120}$$

$$P(1F)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{4\cdot 15}{120}=\frac{60}{120}$$

$$P(0F)=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{20}{120}$$

A questo punto, se l'ostaggio ha 3 carte favorevoli è già salvo. Se invece ha solo 2 carte favorevoli, cercherà di sostituire la carta sfavorevole con una favorevole, scegliendo nel nuovo mazzo.
La probabilità di ottenere una carta favorevole da questo mazzo, costituito da 2 carte F e 6 carte S, è

$$P(1F')=\frac{\binom{2}{1}\binom{6}{0}}{\binom{8}{1}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Perciò la probabilità di salvezza è:

P{ salvezza}= P{ 3 F alla 1° scelta } + P{ 2 F alla 1° scelta, 1 F alla 2° scelta } =

= P{3 F alla 1° scelta} + P{1 F alla 2° scelta | 2 F alla 1° scelta} * P{2 F alla 1° scelta}

$$=\frac{1}{30}+\frac{1}{4}\cdot\frac{36}{120}=\frac{1}{30}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}=\frac{13}{120}=0.1083$$

Esercizio 3

Punto 1

Condizione necessaria perché N eventi siano statisticamente indipendenti è che, per ogni coppia di eventi e_i ed e_j ,

$P\{ e_i , e_j \} = P\{ e_i \}\, P\{ e_j \} \qquad \forall\, i \neq j$

e che per ogni terna di eventi e_i , e_j ed e_k

$P\{ e_i , e_j, e_k \} = P\{ e_i \} P\{ e_j \} P\{ e_k \} \qquad \forall\, i \neq j \neq k$

e così per ogni possibile combinazione di eventi fino a

$P\{ e_1 , e_2, ..., e_n \} = P\{ e_1 \} P\{ e_2 \} ... P\{ e_n \}$

Punto 2

La varianza di una variabile casuale è definita come

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx$$

Ma l'argomento dell'integrale $(x - \mu_x)^2 f_x(x)$ è una funzione non negativa, perché $(x - \mu_x)^2 \geq 0$, essendo un quadrato, e $f_x(x) \geq 0$ per definizione.
Allora σ_x^2 rappresenta l'area che sta sotto una funzione non negativa e sarà a sua volta una grandezza non negativa.

Punto 3

In maniera abbastanza ovvia

$P\{ x_1 < x < x_2 \} \neq P\{ x_1 \leq x \leq x_2 \}$

se $P\{ x = x_1 \} \neq 0$ oppure $P\{ x = x_2 \} \neq 0$

Sappiamo che

$P\{ x = x_0 \} = F_x(x_0) - F_x(x_0^-)$

e quindi $P\{ x = x_0 \}$ assume un valore non nullo solo se $F_x(x_0) \neq F_x(x_0^-)$ ovvero $F_x(x)$ non è continua in x_0 e presenta una discontinuità a gradino. Questo implica la presenza di un termine impulsivo nella $F_x(x)$.
Allora

$P\{ x_1 < x < x_2 \} \neq P\{ x_1 \leq x \leq x_2 \}$

se la $F_x(x)$ presenta un impulso in $x = x_1$ oppure $x = x_2$.