Esercitazione 7 - SVILUPPI IN SERIE E SERIE DI FOURIER

Esercizio 1 *Usando i segnali elementari, definiti sul supporto* $S = [0, 10]$

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1 & i-1 \leq t < i \\ 0 & altrove \end{cases}$$

con $1 \leq i < 10$, *rappresentare la funzione*

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

per $t \in S$. *Verificare la disuguaglianza di Bessel nei casi* $\tau = 5$ *e* $\tau = 10$.

$\left[\tau\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}} - 1\right) \cdot \sum_{i=1}^{10} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\tau}} \psi_i(t)\right]$

Esercizio 2 *Dati gli* N *segnali elementari* $\psi_i(t)$, $1 \leq i \leq N$, *definiti sul supporto* $S = [-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}]$ *come*

$$\psi_i(t) = \begin{cases} A & -\frac{1}{2} + \frac{i-1}{N} \leq t < -\frac{1}{2} + \frac{i}{N} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

a) trovare il valore di A *per i segnali* $\psi_i(t)$ *costituiscono una base ortogonale;*

b) trovare la migliore possibile rappresentazione del segnale $x(t) = t$ *con* $t \in S$ *nella base ortogonale di cui al punto a), calcolando i coefficienti di tale rappresentazione;*

c) calcolare l'energia del segnale di errore, in funzione di N.

Nota: *Si ricordino le relazioni:*

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \tag{2}$$

$\left[A = \sqrt{N};\ \lambda_i = \frac{A}{2N} \cdot \frac{2i-1-N}{N};\ E_e = \frac{1}{12N^2}\right]$

Esercizio 3 *Si considerino i dieci segnali* $A_n \cos(2\pi n \frac{t}{T})$, $0 \leq n \leq 9$, *nell'intervallo temporale* $(0,T)$, *con* T *costante positiva* $< \infty$. *Determinare per quali valori di* A_n *i segnali sono ortonormali.*

$[A_0 = \sqrt{\frac{1}{T}};\ A_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\ \ n \neq 0]$

Esercizio 4 *Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier del segnale, definito in* $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$,

$$x(t) = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{\tau}t} & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$\left[\mu_n = \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin[(\pi \frac{n\tau}{T} - 1)]}{\pi(\frac{n\tau}{T} - 1)}\right]$

Esercizio 5 *Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier del segnale, definito in* $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$,

$$x(t) = \begin{cases} A & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$\left[\beta_k = 0\ \forall k;\ \alpha_0 = A\frac{\tau}{T};\ \alpha_k = 2A\frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(\pi \frac{k\tau}{T})}{\pi \frac{k\tau}{T}}\right]$

Esercizio 6 *Il segnale*

$$x(t) = A\cos(\frac{2\pi t}{T})$$

definito per $-\infty < t < \infty$ *viene trasformato nel segnale* $y(t)$ *in base alla seguente regola:*

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \textit{se } x(t) \geq 0 \\ 0 & \textit{se } x(t) < 0 \end{cases}$$

Verificare se $y(t)$ è ancora periodico di periodo T, e calcolare lo sviluppo in serie di Fourier.

$\left[\mu_0 = \frac{A}{\pi};\ \mu_{\pm 1} = \frac{A}{4};\ \mu_{\pm n} = -\frac{A}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n^2-1}\right]$

Esercizio 7 *Il segnale*

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

definito per $-\infty < t < +\infty$ viene trasformato nel segnale $y(t)$ in base alla seguente regola:

$$y(t) = |x(t)|$$

a) Verificare se $y(t)$ è ancora periodico e, in tal caso, determinare il periodo.

b) Calcolare i coefficienti della serie di Fourier per $y(t)$.

$\left[-\frac{2A}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}n) \cdot \frac{1}{n^2-1}\right]$

Esercizio 8 *Dato il segnale ad energia finita il fig. 1, calcolare lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $-3T \leq t \leq 3T$.*

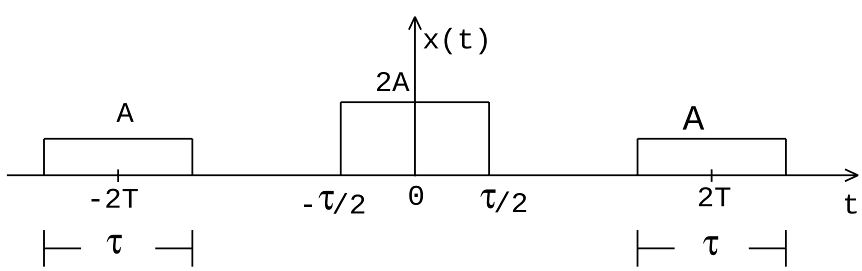

Figura 1: Esercizio 8

$\left[\mu_0 = \frac{2}{3}A\frac{\tau}{T};\ \mu_n = \frac{2A}{\pi n}\left(1 + \mathrm{e}^{-j\frac{2}{3}\pi n}\right) \cdot \sin(n\pi\frac{\tau}{T})\right]$