Esercitazione 4 - Variabili casuali

Esercizio 1 *Una variabile casuale ξ ha una densità di probabilità del tipo:*

$$f_\xi\ (x) = \frac{c}{x^2+1} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

a) Valutare la costante c in modo che $f_\xi(x)$ sia effettivamente una densità di probabilità ;

b) determinare l'espressione della funzione di distribuzione cumulativa $F_\xi(x)$;

c) calcolare la probabilità che ξ sia compresa tra 0 e 1.

[$\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$]

Esercizio 2 *Una variabile casuale ξ ha la seguente densità di probabilità :*

$$f_\xi\ (x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

a) $\{|\ \xi\ | \leq 2\}$

b) $\{|\ \xi\ | \leq 2\ \cup \xi \geq 0\}$

c) $\{|\ \xi\ | \leq 2\ \cap \xi \leq -1\}$

[$1-e^{-2}$, $1-\frac{1}{2}e^{-2}$, $\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{-2})$]

Esercizio 3 *Si consideri l'esperimento casuale "estrazione casuale di un numero intero compreso tra -1 e 3 (estremi inclusi)", rispetto al quale viene definita la variabile casuale X che fa corrispondere a ciascuna uscita sperimentale il suo valore al quadrato. Si chiede di:*

a) Individuare lo spazio ambiente S dell'esperimento casuale, le uscite sperimentali s_i ed i possibili valori assunti dalla variabile casuale X (codominio di X);

b) determinare la funzione di distribuzione cumulativa e la densità di probabilità di X;

c) Calcolare le probabilità $P\{X \leq 0\}$, $P\{4 < X \leq 6\}$, $P\{X < 4\}$, $P\{X \geq 4\}$.

[1/5, 0, 3/5, 2/5]

Esercizio 4 *Si consideri un sistema di trasmissione su canale binario simmetrico (probabilità di transizione* $p = 2/5$*) che, in trasmissione, impiega una tecnica di codifica a ripetizione (parole di codice di lunghezza* $2n+1 = 3$*) ed in ricezione una tecnica di decodifica a maggioranza. Una volta definita la varibile casuale* $X(s) =$ *"numero di simboli errati nella parola ricevuta"*

a) determinare analiticamente e disegnare la densità di probabilità $f_X(x)$ *e la funzione di distribuzione cumulativa* $F_X(x)$ *di* X*;*

b) calcolare la probabilità di errore $P\{E\}$ *sulla trasmissione di una singola parola di codice.*

[44/125]

Esercizio 5 *Una variabile casuale* ξ *la cui densità di probabilità* $f_\xi\ (x)$ *è nota, viene fatta passare attraverso un dispositivo lineare, con legge:*

$$y = g(x) = ax + b$$

Valutare la densità di probabilità della variabile casuale risultante η *nel caso generale e nel caso particolare in cui* ξ *sia una variabile casuale gaussiana con valor medio nullo e varianza* σ^2*.*

Esercizio 6 *Si determini la densità di probabilità della variabile casuale* η *ottenuta trasformando la variabile casuale* ξ *con un dispositivo* limitatore *la cui caratteristica ingresso/uscita è*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ +1 & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 7 *La variabile casuale* ξ *con densità di probabilità gaussiana a valor medio* μ *e deviazione standard unitaria é applicata all'ingresso di ciascuno dei due circuiti non lineari, le cui caratteristiche statiche sono rappresentate nella figura 1. Determinare le densità di probabilità delle variabili casuali di uscita per* $\mu = 0$ *e* $\mu = 1$*.*

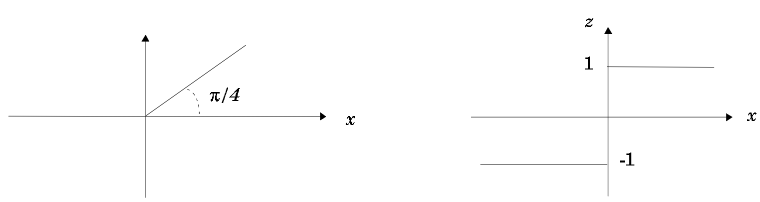

Figura 1: Caratteristiche di ingresso/uscita.

Esercizio 8 *La variabile casuale* ξ *ha una densità di probabilità di Laplace con* $a = 1$

$$f_\xi(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}$$

ed è applicata all'ingresso di due sistemi non lineari le cui caratteristiche di ingresso/uscita sono indicate nella figura 2. Le uscite dei due sistemi sono rispettivamente le variabili casuali η e ζ. Tracciare l'andamento di $f_\eta(y)$ e $f_\zeta(z)$.

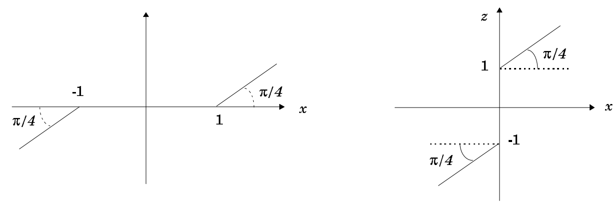

Figura 2: Caratteristiche di ingresso/uscita.

Esercizio 9 *Sia data la variabile casuale ξ con densità di probabilità*

$$f_\xi\ (x) = e^{-x}\, u(x)$$

si definisca la nuova variabile casuale η come :

$$\eta\ = \begin{cases} \xi & se\ \xi \leq 1 \\ 1/\xi & se\ \xi > 1 \end{cases}$$

calcolare la densità di probabilità di η.

Esercizio 10 *Data una variabile casuale ξ con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $(0,1)$, determinare la trasformazione $\eta = g(\xi)$ tale che la densitá probabilità di η sia data da:*

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \exp(-y) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

[$\ln \frac{1}{1-x}$]