Esercitazione 10 - Processi casuali

Esercizio 1 *Si consideri lo schema di fig. 1, dove* $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ *e* θ *è una costante. Si consideri il parametro* A *come una variabile casuale uniformemente distribuita tra 0 e 2. Calcolare la media di insieme di* $y(t)$ *e valutare in quali istanti di tempo tale media è massima.*

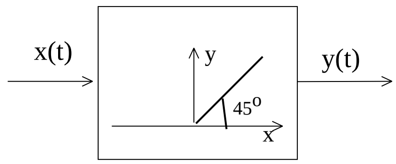

Figura 1:

Esercizio 2 *Si consideri il segnale*

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) - z(t)\sin(\omega_0 t)$$

dove $x(t)$ *e* $z(t)$ *sono processi casuali a media nulla, indipendenti e con la stessa autocorrelazione* $R_x(t_1,t_2) = R_z(t_1,t_2)$.

Determinare $R_y(t_1,t_2)$ *e verificare che se* $R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1 - t_2)$, *allora* $R_y(t_1,t_2) = R_y(t_1 - t_2)$.

Esercizio 3 *Si consideri il processo causale di fig. 2, costituito dalla successione di impulsi* $p_k(t)$ *di durata casuale* α_k. *Le variabili casuali* α_k *sono indipendenti e identicamente distribuite, con densità di probabilità uniforme tra* 0 *e* T.

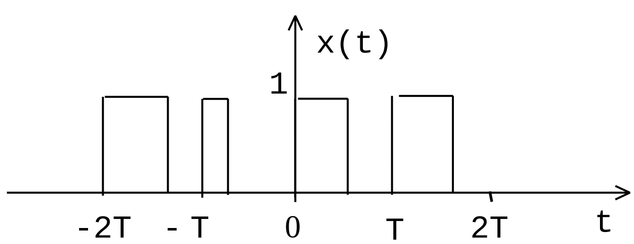

Figura 2:

Determinare la media di insieme del processo $x(t)$ *e verificare che è una funzione periodica.*

Esercizio 4 *Si consideri un processo casuale $x(t)$ stazionario con autocorrelazione nulla per $|\tau| > T$ e positiva per $|\tau| < T$. Si costruisca il processo casuale $y(t) = x(t) + x(t - T_0)$ e da questo si estraggano due campioni nei due istanti t_1 e $t_1 + A$.*

Trovare il minimo valore di A tale per cui il coefficiente di correlazione delle variabili casuali così ottenute sia nullo.

Esercizio 5 *Un processo casuale $x(t)$ gaussiano stazionario a media nulla viene moltiplicato per un'onda quadra $r(t)$ che assume alternativamente i valori $+1$ e -1 ogni T secondi. Calcolare;*

a) *la densità di probabilità del segnale $y(t)$ così ottenuto;*

b) *la probabilità $P\{y(t) > y(t + a)\}$ nei due casi $a = T$ e $a = T/2$.*

c) *(FAC.) Si definisca il processo $z(t) = y(t) - y(t - T/2)$ e si verifichi se $z(t)$ è stazionario del primo ordine.*

Esercizio 6 *Si consideri un processo gaussiano stazionario $n(t)$, con $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ e N_0 una costante positiva. A partire da $n(t)$, si ottengano le due variabili casuali*

$$X = \int_T^{3T} n(\theta) d\theta$$

$$Y = \int_0^{aT} n(\theta) d\theta$$

dove a è una costante positiva che può assumere valori compresi tra 1 e 3. Calcolare la media congiunta $E\{XY\}$ e dire per quale valore di a tale media è nulla.

Esercizio 7 *È data una sinusoide $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, dove ϕ è una variabile casuale uniformemente distribuita tra $-\pi$ e π. Alla sinusoide viene sommato un processo gaussiano stazionario $n(t)$ con $R_n(\tau) = A\delta(\tau)$, indipendente da ϕ. Si campioni il processo risultante in due istanti di tempo tali da ottenere due campioni scorrelati.*

Esercizio 8 *Un rumore gaussiano $n(t)$ con densità spettrale di potenza $G_n(f) = N_0/2$ per $|f| < B$ e nulla altrove passa attraverso un sistema lineare con risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T)$. Il segnale in uscita passa attraverso un sistema non lineare che ne fa il quadrato. Calcolare il valor medio dell'uscita nel caso $B = \frac{3}{4T}$.*

Esercizio 9 *Si consideri un processo del tipo*

$$x(t) = a(t) \cos\left(\frac{20\pi}{T} t\right)$$

dove $a(t)$ è un processo stazionario in senso lato con valor medio nullo e autocorrelazione

$$R_a(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau/T)}{\tau}$$

Verificare se $x(t)$ è stazionario o ciclostazionario in senso lato

(NOTA: un processo si dice ciclostazionario se la sua autocorrelazione è una funzione periodica).

Esercizio 10 *Si consideri il processo casuale*

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right)$$

dove ψ *è una variabile casuale uniformemente distribuita in* $[-\pi, \pi]$. *Si campioni* $x(t)$ *nei punti*

$$t_i = -\frac{T}{2} + i\frac{T}{N}$$

con $N \geq 2$ *e si costruisca la variabile causale*

$$\eta = \sum_{i=0}^{N} x(t_i)$$

Calcolare:

a) *Media e varianza di* η*;*

b) $P(\eta \geq 1)$ *nel caso* $N = 2$.

Esercizio 11 *Un rumore gaussiano* $n(t)$ *con densità spettrale*

$$G_n(f) = \frac{a^2}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

viene sommato a un segnale periodico di periodo T *il cui andamento nel periodo fondamentale è rappresentato in fig. 3. La somma dei due segnali viene filtrata con un filtro passabasso ideale con frequenza di taglio* f_0.

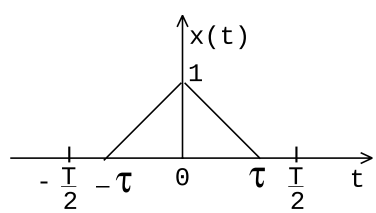

Figura 3:

Calcolare i valori di f_0 *che rendono il processo all'uscita del filtro stazionario per la media.*

Esercizio 12 *È dato un processo casuale del tipo*

$$y(t) = x(t)s(t)$$

dove $x(t)$ *è un processo stazionario del primo ordine con densità di probabilità uniforme nell'intervallo* $[-1, 1]$ *e autocorrelazione triangolare, come in fig. 4, e* $s(t)$ *è un segnale a dente di sega mostrato ancora in fig. 4.*

Valutare il parametro A *che compare in fig. 4 e calcolare l'autocorrelazione di* $y(t)$.

Esercizio 13 *Si consideri il sistema di fig. 5, dove:*

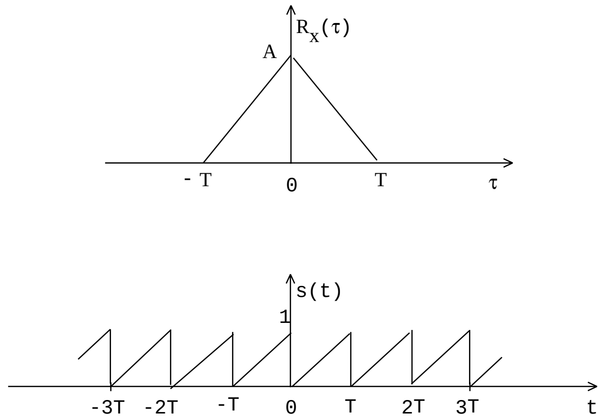

Figura 4:

- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k r(t - kT)$
- α_k *sono variabili casuali statisticamente indipendenti che assumono con uguale probabilità i valori* $+1$ *e* -1*;*
- $r(t)$ *è un impulso rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata* T*;*
- $n(t)$ *è un processo casuale gaussiano stazionario a valore medio nullo e varianza nota;*
- $H(f) = 1 + 0.1[\cos(2\pi fT) - j\sin(2\pi fT)]$

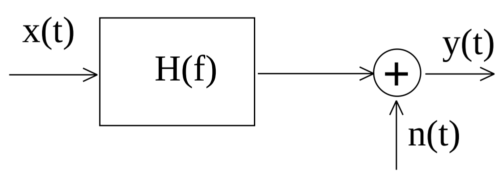

Figura 5:

Calcolare la probabilità $P\{y(T/2) > 1\}$.

Esercizio 14 *Sono dati un processo casuale stazionario* $x(t)$ *con densità di probabilità del primo ordine uniforme nell'intervallo* $[-A, A]$ *e un segnale determinato* $y(t)$ *con andamento indicato in fig. 6.*

Si consideri il processo casuale $z(t) = x(t)y(t)$. *Spiegare perché* $z(t)$ *non è un processo stazionario.*

Esercizio 15 *Un processo di rumore gaussiano bianco,* $n(t)$, *con densità spettrale di potenza costante* $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$, *passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento* $H(f)$. *Si sa che* $|H(f)|^2$ *è una funzione triangolare simmetrica, con valore massimo pari a 1 e banda* $[-B, B]$. *Sia* $y(t)$ *il processo all'uscita del sistema.*

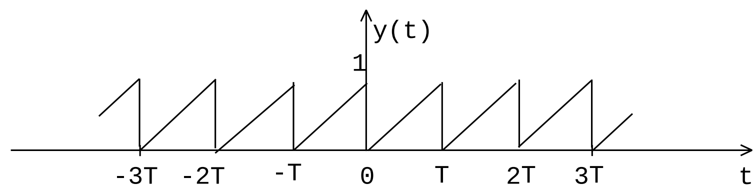

Figura 6:

- *Calcolare le probabilità $P[y(t) > 0]$ e $P[y(t) > 1]$*
- *È possibile ottenere due variabili casuali indipendenti campionando $y(t)$ in due opportuni istanti di tempo?*

Esercizio 16 *Un processo casuale $x(t)$ reale e stazionario in senso lato ha densità di probabilità $f_X(x)$ del primo ordine indipendente dal tempo e uniforme nell'intervallo $(-2, 2)$ e autocorrelazione $R_X(\tau)$ triangolare nell'intervallo $(-T, T)$, con valore massimo pari a K. Tale processo passa attraverso un sistema LTI con risposta all'impulso*

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t - \theta)$$

dove θ è una costante positiva. Sia $y(t)$ l'uscita del sistema.

1. *Determinare il valore della costante K;*
2. *Calcolare il valor medio di $y(t)$.*
3. *Calcolare la varianza di $y(t)$, e individuare per quali valori di θ tale varianza è massima.*
4. *Calcolare l'autocorrelazione di $y(t)$ in funzione di quella di $x(t)$ e disegnarla nel caso $\theta = 2T$.*
5. *$y(t)$ è stazionario in senso lato?*

Esercizio 17 *Il segnale $x(t) = 2sin^2(\pi t/T)$ è posto all'ingresso di un sistema lineare e causale con risposta all'impulso rettangolare, di ampiezza unitaria e durata $T/2$.*

- *Quanto vale il segnale di uscita $y(t)$?*

Si supponga, ora, che all'ingresso del sistema venga inviato il processo casuale $x(t) + n(t)$, dove $x(t)$ è il segnale precedentemente descritto e $n(t)$ è rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_n(f) = N_0/2$. Sia $z(t)$ il processo all'uscita del sistema.

- *Calcolare la media e la varianza di $z(t)$*
- *Calcolare la densità di probabilità del primo ordine di $z(t)$*
- *$z(t)$ è un processo stazionario?*