Politecnico di Torino

Corsi Universitari a Distanza in Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Teoria dei segnali (soluzioni)

Tema d'esame 06/09/2005

Esercizio n. 1

Una variabile casuale X ha una densità di probabilità del tipo:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ l\,e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare l in modo che $f_X(x)$ sia effettivamente una densità di probabilità.
Sia $Y = g(X)$ una trasformazione della variabile casuale,

$$g(X) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.5 & x \in [1,2] \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione $F_Y(y)$ e la funzione di densità $f_Y(y)$ della variabile Y.

Soluzione:
Perché la funzione sia una densità di probabilità, occorre che l'integrale della funzione stessa sia uguale a 1. Imponendo tale uguaglianza si ricava $l = 1$.
Ricaviamo la funzione di distribuzione $F_Y(y) = P(Y < y)$.
La v.c. Y non può mai assumere valori negativi: la funzione F_Y e' nulla da $-\infty$ a 0 (escluso). Inoltre la v.c. Y non può mai assumere valori maggiori di 1: F_Y e' uguale a 1 tra +1 e $+\infty$.
La variabile Y vale 0 quando X assume valori strettamente minori di +1. Nell'intervallo [0,0.5) $F_Y(y)$ e' una costante pari a $\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}$.

La variabile Y vale 0.5 quando X assume valori compresi tra [1,2], quindi nell'intervallo [0.5,1), $F_Y(y)$ è una costante pari a $\int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^2 e^{-x}dx = 1 - e^{-2}$.

Da notare che la funzione F_Y e' discontinua in 0, 0.5 e in 1.

Per ricavare la funzione di densità $f_Y(y)$, basta semplicemente derivare la funzione $F_Y(y)$ appena ricavata:
$f_Y(y)$ e' nulla dove $F_Y(y)$ è una costante, cioè negli intervalli ($-\infty$,0) (0,0.5) (0.5,1) e (1, $+\infty$).
Nei punti in cui $F_Y(y)$ è discontinua (0, 0.5 e 1), $f_Y(y)$ è uguale ad una delta di dirac moltiplicata per una costante uguale al salto in ciascuna discontinuità.

Esercizio n. 2

Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier del segnale $y(t)$ rappresentato in fig 2, definito su $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

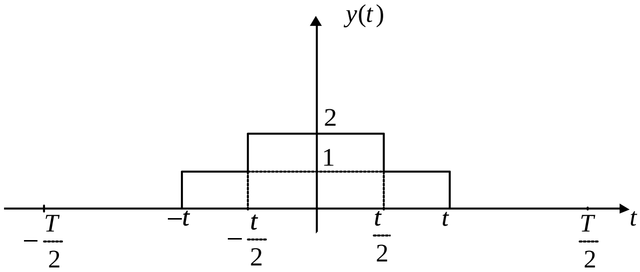

Fig.2

Soluzione:

Un segnale ad energia finita definito su $\left(-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}\right)$ può essere espresso in serie di Fourier esponenziale dalla relazione:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_n e^{jn\frac{2p}{T}t}$$

dove:

$$m_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} y(t) e^{-jn\frac{2p}{T}t} dt$$

$y(t)$ può essere scomposto come somma di due porte e quindi si può scrivere:

$$m_n = m_n^{'} + m_n^{''} = \frac{1}{T}\int_{-t}^{+t} 1e^{-jn\frac{2p}{T}t}\,dt + \frac{1}{T}\int_{-t/2}^{+t/2} 1e^{-jn\frac{2p}{T}t}\,dt$$

Risolvendo i due integrali si trova:

$$m_n^{'} = \frac{j}{2np}\left[e^{-jn\frac{2p}{T}t} - e^{jn\frac{2p}{T}t}\right] \qquad m_n^{''} = \frac{j}{2np}\left[e^{-jn\frac{p}{T}t} - e^{jn\frac{p}{T}t}\right]$$

Esercizio n. 3

Sia $x(t)$ un segnale a banda limitata il cui spettro $X(f)$ è nullo per $|f| > \frac{1}{4T}$ e vale $X(f) = \cos(2pfT)$ per $|f| \leq \frac{1}{4T}$.

Determinare la trasformata di Fourier del segnale $y(t) = 2x(2t)$.

Soluzione:

La trasformata di Fourier di $y(t) = 2x(2t)$ si trova applicando la proprietà di scalamento

$$y(t) = 2x(2t) \Rightarrow Y(f) = 2\frac{1}{2}\cos(2pfT\frac{1}{2}) = \cos(pfT)$$

Tale risultato vale per $|f| \leq \frac{1}{2T}$, zero altrimenti.

Esercizio n. 4

Calcolare l'energia del segnale $z(t) = e^{j(mx(t)+p)}$ dove m è una costante strettamente maggiore di zero e $x(t)$ è un segnale reale a banda limitata.

Soluzione:

L'energia del segnale e' definita come l'integrale del suo modulo al quadrato. In questo caso, il segnale in questione può essere visto come un segnale sinusoidale di ampiezza costante e fase variabile. Visto che non e' stato specificato nulla nel testo, e' sensato assumere il segnale definito nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

Si può scrivere quindi che $E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1dt \rightarrow \infty$. L'integrale diverge, il segnale ha energia infinita.