Teoria dei Segnali
Diploma teledidattico – Sede di Alessandria
Compito Scritto – 22 maggio 1998

Esercizio 1 Si dispone di una ruota della fortuna divisa in 4 "spicchi" di dimensioni identiche colorati di rosso (R), bianco (B), verde (V) e giallo (G). Con questa ruota, si esegue un esperimento casuale che consiste nel far girare *due* volte consecutivamente la ruota, prendendo nota della sequenza di colori risultante. Ciascuna rotazione può essere considerata indipendente dalle rotazioni precedenti.

Disegnare il diagramma di Venn dello spazio ambiente S, indicando i due eventi A="nessun rosso" e B="colori uguali". Calcolare le probabilità $P\{A\}$, $P\{B\}$, $P\{A \cup B\}$, $P\{A \cap B\}$, $P\{B \mid A\}$.

Si costruisce poi la variabile casuale ξ a partire dall'esperimento casuale eseguito. I valori di ξ in corrispondenza dei singoli risultati sperimentali, sono determinati assegnando a ciascuna colore un punteggio e calcolando la media tra i punteggi del primo e del secondo colore. I punteggi sono indicati di seguito:

$$R \Rightarrow -2 \quad B \Rightarrow 2 \quad V \Rightarrow 1 \quad G \Rightarrow 0$$

(Esempio: se il risultato dell'esperimento è la coppia di colori (R, V), il valore della variabile casuale ξ in corrispondenza di tale risultato è la media tra i punteggi associati ai colori Rosso (-2) e Verde (1), cioè $(-2+1)/2 = -1/2$).

Determinare la densità di probabilità, la funzione di distribuzione cumulativa, il valor medio e la varianza della variabile casuale ξ.

Determinare inoltre la probabilità $P\{\mid \xi \mid < 3/2\}$.

Esercizio 2 Un processo casuale $x(t)$ reale e stazionario in senso lato ha densità di probabilità $f_X(x)$ del primo ordine indipendente dal tempo e uniforme nell'intervallo $(-2, 2)$. L'autocorrelazione $R_X(\tau)$ di $x(t)$ è così definita:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \frac{K}{2}\left(1 + \cos \pi \frac{\tau}{T}\right) & \mid \tau \mid \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Tale processo passa attraverso un sistema LTI la cui risposta all'impulso è

$$h(t) = A\delta(t) + (1 - A)\delta(t - \theta)$$

dove θ è una costante positiva ed $0 < A < 1$. Sia $y(t)$ l'uscita del sistema.

a) Disegnare $R_X(\tau)$ e determinare il valore della costante K.

b) Calcolare lo spettro di potenza di $x(t)$.

c) Calcolare il valor medio e la varianza di $y(t)$.

d) (*Facoltativo*) Calcolare l'autocorrelazione di $y(t)$ in funzione di quella di $x(t)$. $y(t)$ è stazionario in senso lato?

Teoria dei Segnali

Diploma teledidattico – Sede di Alessandria

Compito Scritto – 22 maggio 1998

Traccia delle soluzioni

Esercizio 1 *a) Diagramma di Venn*

I risultati sperimentali sono rappresentati da tutte le $4^2 = 16$ possibili coppie di colori, così come indicato dal diagramma di Venn schematizzato di seguito:

	R	B	V	G
R	b			
B		a b	a	a
V		a	a b	a
G		a	a	a b

Table 1: Diagramma di Venn di S. 'a': evento A, 'b': evento B

b) Probabilità

Dal momento che gli eventi sono equiprobabili e statisticamente indipendenti, le probabilità cercate si calcolano come rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero dei casi possibili presenti nello spazio ambiente S:

$P\{A\} = 9/16$
$P\{B\} = 4/16$
$P\{A \cup B\} = 10/16$
$P\{A \cap B\} = 3/16$
$P\{B \mid A\} = 3/9.$

c) Statistica della variabile casuale ξ

I valori assunti da ξ per ciascun risultato dell'esperimento casuale, sono indicati nella tabella 3

	R	B	V	G
R	-2	0	-1/2	-1
B	0	2	3/2	1
V	-1/2	3/2	1	1/2
G	-1	1	1/2	0

Table 2: Valori di ξ

ξ è una variabile casuale discreta con la seguente *densità di probabilità*:

$$f_\xi(x) = \sum_{i=1}^{8} p_i \delta(x - x_i)$$

dove le probabilità $p_i = \mathrm{P}\{x = x_i\}$ sono riportate nella tabella 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	-1	$-1/2$	0	1/2	1	3/2	2
p_i	1/16	2/16	2/16	3/16	2/16	3/16	2/16	1/16

Table 3: Densità di probabilità di ξ.

Il *valor medio* di ξ si ottiene come segue:

$$\mu_\xi = \mathrm{E}\{\xi\} = \sum_{i=1}^{8} x_i p_i = \frac{1}{16}\left[(-2)\times 1 + (-1)\times 2 + (-\frac{1}{2})\times 2 + 0\times 3 + \frac{1}{2}\times 2 + 1\times 3 + \frac{3}{2}\times 2 + 2\times 1\right] = \frac{1}{4}$$

La *varianza* di ξ è:

$$\sigma_\xi^2 = \mathrm{E}\{\xi^2\} - \mu_\xi^2 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 p_i - \mu_\xi^2 = \frac{1}{16}\left[4\times 1 + 1\times 2 + \frac{1}{4}\times 2 + 0\times 3 + \frac{1}{4}\times 2 + 1\times 3 + \frac{9}{4}\times 2 + 4\times 1\right] - \frac{1}{16} = \frac{35}{32}$$

d) La *probabilità* cercata è:

$$P\{|\ \xi\ | < 3/2\} = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16}$$

Esercizio 2 L'uscita del sistema è data dal prodotto di convoluzione tra $x(t)$ e la risposta all'impulso del sistema:

$$y(t) = x(t) \star h(t) = x(t) \star [A\delta(t) + (1-A)\delta(t-\theta)] = Ax(t) + (1-A)x(t-\theta)$$

a) K è il valore di $R_X(\tau)$ nell'origine e quindi coincide con la varianza di $x(t)$. Poiché $x(t)$ ha valor medio nullo

$$\mathrm{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u) du = \int_{-2}^{2} \frac{u}{4} du = 0$$

la varianza coincide con il suo valor quadratico medio:

$$K = R_X(0) = \mathrm{Var}\{x(t)\} = \mathrm{E}\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_X(u) du = \int_{-2}^{2} \frac{u^2}{4} du = \frac{4}{3}$$

b) Lo spettro di potenza di $x(t)$ è la trasformata di Fourier di $R_X(\tau)$:

$$\begin{aligned}
G_X(f) &= \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \\
&\frac{K}{2}\mathcal{F}\left\{p_{2T}(\tau)\left(1+\cos\pi\frac{\tau}{T}\right)\right\} = \\
&\frac{K}{2}\mathcal{F}\{p_{2T}(\tau)\} \star \mathcal{F}\left\{1+\cos\pi\frac{\tau}{T}\right\} = \\
&\frac{2KT}{2}\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} \star \left\{\delta(f) + \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right]\right\} = \\
&KT\left\{\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T}{2\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T} + \frac{\sin 2\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T}{2\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T}\right]\right\} = \\
&KT\left\{\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T} + \frac{\sin 2\pi fT}{2\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T}\right]\right\} = \\
&K\sin 2\pi fT\left\{\frac{1}{2\pi f} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left(f-\frac{1}{2T}\right)} + \frac{1}{\left(f+\frac{1}{2T}\right)}\right]\right\} = \\
&K\sin 2\pi fT\left\{\frac{1}{2\pi f} - \frac{f}{2\pi\left(f^2-\frac{1}{4T^2}\right)}\right\} = \\
&\frac{K}{2\pi}\sin 2\pi fT\left\{\frac{-\frac{1}{4T^2}}{f\left(f^2-\frac{1}{4T^2}\right)}\right\} = \\
&-\frac{K}{4T}\left\{\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT\left(f^2-\frac{1}{4T^2}\right)}\right\}
\end{aligned}$$

($p_{2T}(\tau)$ è la porta simmetrica rispetto all'origine di durata $2T$)

c) Il valor medio dell'uscita del sistema è

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\{y(t)\} = \\
&\quad \mathrm{E}\{Ax(t) + (1-A)x(t-\theta)\} = \\
&\quad A\mathrm{E}\{x(t)\} + (1-A)\mathrm{E}\{x(t-\theta)\} = 0
\end{aligned}$$

La varianza di $y(t)$ si ottiene applicando la definizione e ricordando che $\mathrm{E}\{y(t)\} = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\{y(t)\} = \\
&\quad \mathrm{E}\{y^2(t)\} = \\
&\quad \mathrm{E}\{[Ax(t) + (1-A)x(t-\theta)]^2\} = \\
&\quad A^2\mathrm{E}\{x^2(t)\} + (1-A)^2\mathrm{E}\{x^2(t-\theta)\} + 2A(1-A)\mathrm{E}\{x(t)x(t-\theta)\} = \\
&\quad A^2R_X(0) + (1-A)^2R_X(0) + 2A(1-A)R_X(\theta) = \\
&\quad K\left[A^2 + (1-A)^2\right] + 2A(1-A)R_X(\theta)
\end{aligned}$$

d) Calcolare l'autocorrelazione di $y(t)$ in funzione di quella di $x(t)$

$$\begin{aligned}
&R_Y(t_1, t_2) = \\
&\quad \mathrm{E}\{y(t_1)y(t_2)\} = \\
&\quad \mathrm{E}\{[Ax(t_1) + (1-A)x(t_1-\theta)]\,[Ax(t_2) + (1-A)x(t_2-\theta)]\} = \\
&\quad A^2\mathrm{E}\{x(t_1)x(t_2)\} + (1-A)^2\mathrm{E}\{x(t_1-\theta)x(t_2-\theta)\} + \\
&\quad +A(1-A)\mathrm{E}\{x(t_1)x(t_2-\theta)\} + A(1-A)\mathrm{E}\{x(t_2)x(t_1-\theta)\} = \\
&\quad A^2R_X(t_1,t_2) + (1-A)^2R_X(t_1-\theta, t_2-\theta) + A(1-A)R_X(t_1, t_2-\theta) + A(1-A)R_X(t_1-\theta, t_2) = \\
&\quad A^2R_X(\tau) + (1-A)^2R_X(\tau) + A(1-A)R_X(\tau-\theta) + A(1-A)R_X(\tau+\theta)
\end{aligned}$$

dove $\tau = t_2 - t_1$.
Poiché $\mathrm{E}\{y(t)\}$ è costante nel tempo e $R_Y(t_1, t_2) = R_Y(\mid t_1 - t_2 \mid)$, il processo $y(t)$ risulta stazionario in senso lato.