Teoria dei Segnali

Diploma teledidattico

Compito Scritto – 20 luglio 1998

Esercizio 1 Una variabile casuale ξ la cui densità di probabilità $f_\xi\ (x)$ è nota viene fatta passare attraverso un dispositivo non lineare, con legge:

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

a) Valutare la densità di probabilità $f_\eta(y)$ della variabile casuale risultante $\eta = g(\xi)$.
Ipotizzando ora che ξ abbia densità di probabilità di Laplace:

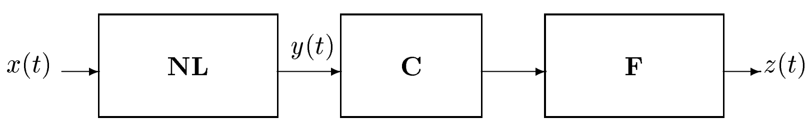
$$f_\xi(x) = \alpha e^{-|x|}$$

b) Valutare il coefficiente α che rende $f_\xi(x)$ una vera densità di probabilità;

c) Determinare l'espressione di $f_\eta(y)$ quando ξ è distribuita secondo la densità di probabilità di Laplace.

d) Calcolare il valor medio di η nelle stesse condizioni del punto precedente (*sugg.:* ricordare che $\int xe^x dx = (x-1)e^x$).

Esercizio 2 Si consideri il sistema di trasmissione schematizzato nella figura seguente:



dove

NL è un blocco non lineare che eleva alla N-esima potenza il segnale posto al suo ingresso:

$$y(t) = x^N(t)$$

C è un campionatore ideale la cui frequenza di campionamento è f_c;

F è un filtro passa basso ideale con funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |\ f\ | \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il segnale di ingresso è $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

a) Nel caso di N generico, determinare le espressioni della minima frequenza di campionamento $f_{c,min}$ e della banda B del filtro per ottenere la perfetta ricostruzione del segnale di ingresso ($z(t) = x(t)$).

b) Scrivere l'espressione di $z(t)$ nel caso in cui $N = 3$, $f_c = 4f_0$ e $B = 3f_0$.

NOTA: Nella soluzione dell'esercizio potrebbe essere utile la seguente relazione:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Teoria dei Segnali
Diploma teledidattico
Compito Scritto – 20 luglio 1998
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1 *a*) Una possibilità per calcolare la densità di probabilità della variabile casuale trasformata η consiste nel passare attraverso la valutazione della funzione di distribuzione cumulativa di η:

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = P\{g(\xi) \leq y\}$$

Tenendo conto delle caratteristiche della trasformazione subita da ξ:

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

si può calcolare la funzione di distribuzione cumulativa di η in 2 passi:
1) $y < 0$

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = 0$$

perché la trasformazione genera soltanto valori non negativi.
2) $y \geq 0$

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = P\{-y/2 \leq \xi \leq y\} = F_\xi(y) - F_\xi(-y/2)$$

Riassumendo:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_\xi(y) - F_\xi(-y/2) & y \geq 0 \end{cases}$$

Derivando $F_\eta(y)$ rispetto a y si ottiene la densità di probabilità:

$$f_\eta(y) = \left[f_\xi(y) + \frac{1}{2} f_\xi(-y/2) \right] u(y)$$

dove $u(y)$ è la funzione gradino unitario.

b) Il valore di α si ottiene imponendo che l'integrale di $f_\xi(x)$ su tutto l'asse reale valga 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi\ (x) dx = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

dunque la densità di probabilità di ξ risulta

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

c) Per particolarizzare $F_\eta(y)$ al caso di ξ distribuita "alla Laplace", occorre determinare la funzione di distribuzione cumulativa di ξ:

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-|u|}}{2} du = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{u}}{2} du & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{e^{-u}}{2} du & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{u} \Big|_{-\infty}^{x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-u} \Big|_0^x & x > 0 \end{cases}$$

da cui

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'espressione di $F_\eta(y)$, si ottiene:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_\xi(y) - F_\xi(-y/2) & y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-y} - \frac{1}{2} e^{-y/2} & y \geq 0 \end{cases}$$

Derivando la funzione di distribuzione cumulativa si ricava la densità di probabilità:

$$f_\eta(y) = \left[f_\xi(y) + \frac{1}{2} f_\xi(-y/2) \right] u(y) = \left[\frac{1}{2} e^{-y} + \frac{1}{4} e^{-y/2} \right] u(y)$$

d) Il valor medio di η si ottiene applicando la definizione:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\eta\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} ye^{-y/2}dy = \\ &= -\frac{1}{2}(y-1)\, e^y\Big|_{-\infty}^{0} - (y-1)\, e^y|_{-\infty}^{0} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 2 *a*) Il segnale all'uscita del blocco **NL** è

$$y(t) = \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N}\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i} e^{j(2i-N)2\pi f_0 t}$$

La sua trasformata di Fourier è

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \frac{1}{2^N}\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\delta\left(f-(2i-N)f_0\right)$$

$Y(f)$ è costituita da $N+1$ delta di Dirac centrate alle frequenze $f_{y,i} = (2i-N)f_0$. La componente armonica alla massima frequenza è centrata alla frequenza $f_{y,max} = Nf_0$, dunque la minima frequenza di campionamento (che evita il fenomeno dell'aliasing) vale:

$$f_{c,min} = 2f_{y,max} = 2Nf_0$$

Per come sono definite le $f_{y,i}$, all'uscita del blocco **NL** sono presenti le componenti armoniche alle frequenze $\pm f_0$ solo se N è dispari (quando $i = (N\pm 1)/2$). Solo in questo caso è possibile ottenere in uscita un segnale sinusoidale alla frequenza f_0 (a meno di introdurre volontariamente aliasing). Sotto queste condizioni, la banda del filtro deve essere pari a $B = f_0$.

b) Se $N=3$, si ha

$$Y(f) = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{3}\binom{N}{i}\delta\left(f-(2i-3)f_0\right) = \frac{1}{8}\left[\delta(f+3f_0) + 3\delta(f+f_0) + 3\delta(f-f_0) + \delta(f-3f_0)\right]$$

Poiché $f_{y,max} = 3f_0$, la frequenza $f_c = 4f_0$ non soddisfa il teorema del campionamento.

Un modo per calcolare $z(t)$ è determinare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato (di seguito $Y_c(f)$) e cercare le componenti armoniche che cadono entro la banda passante del filtro.

Per definizione:

$$Y_c(f) = \mathcal{F}\left\{y(t)\sum_n \delta\left(t-\frac{n}{f_c}\right)\right\} = f_c Y(f) \star \sum_n \delta(f-nf_c) = f_c\sum_n Y(f-nf_c)$$

Considerando le componenti armoniche associate agli indici più bassi ($n=-1,0,1$) si osserva che (lo stesso risultato può essere ottenuto più agevolmente per via grafica):

$$\begin{aligned} Y_c(f) &= f_c\left[\cdots + Y(f+f_c) + Y(f) + Y(f-f_c) + \cdots\right] \\ &= \frac{f_0}{2}\left[\cdots + \delta(f-f_0) + 3\delta(f-3f_0) + 3\delta(f-5f_0) + \delta(f-7f_0) + \right. \\ &\quad \delta(f+3f_0) + 3\delta(f+f_0) + 3\delta(f-f_0) + \delta(f-3f_0) + \\ &\quad \left.\delta(f+7f_0) + 3\delta(f+5f_0) + 3\delta(f+3f_0) + \delta(f+f_0) + \cdots\right] \\ &= \frac{f_0}{2}\left[\cdots + 4\delta(f+3f_0) + 4\delta(f+f_0) + 4\delta(f-f_0) + 4\delta(f-3f_0) + \cdots\right] \end{aligned}$$

L'uscita del filtro nel dominio della frequenza contiene solo le δ che cadono nella banda del filtro (cioè quelle centrate nelle frequenze $\pm 3f_0, \pm f_0$):

$$Z(f) = 4\frac{f_0}{2}\left[\delta(f+3f_0) + \delta(f+f_0) + \delta(f-f_0) + \delta(f-3f_0)\right]$$

Antitrasformando

$$z(t) = 4f_0\left[\cos(2\pi f_0 t) + \cos(6\pi f_0 t)\right]$$