

Teoria dei Segnali - Esercitazioni

Francesco Alesiani, Gabriella Olmo

February 19, 2002

1 Esercizione

1.1 Probabilità come misura, definizione assiomatica

Teoria 1 Probabilità come misura di un evento espressa come rapporto tra numero di casi favorevoli su casi totali

$$P\{A\} = \frac{\text{n. casi in cui l'evento } A \text{ si verifica}}{\text{n. casi totali}} \quad (1)$$

•

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\} \quad (2)$$

• $A \cap B = \{0\}$

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} \quad (3)$$

• $A, B = X - A = A^c$

$$(X - A) \cap A = 0, (X - A) \cup A = X$$

$$P\{A^c\} = 1 - P\{A\} \quad (4)$$

• $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

• $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

•

$$P\{A^c\} = 1 - P\{A\}$$

$$P\{A^c \cap B^c\} = 1 - P\{A \cup B\}$$

$$P\{A^c \cup B^c\} = 1 - P\{A \cap B\}$$

Notazione:

$$A^c \leftrightarrow \bar{A}$$

$$A \cup B \leftrightarrow A + B$$

$$A \cap B \leftrightarrow AB$$

Legge di De Morgan

$$P\{A \bar{+} B\} = P\{\bar{A}\bar{B}\} \quad (5)$$

$$P\{\bar{A}B\} = P\{\bar{A} + \bar{B}\} \quad (6)$$

$$P\{\bar{A}\} = P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} = P\{X - A\} \quad (7)$$

dove $A, B \subset X$ e X è lo spazio totale.

Esercizio 1 Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Determinare la probabilità che sia:

1. un asso

2. un fante di cuori
3. un tre di picche o un sei di fiori
4. un cuori
5. un seme diverso da cuori
6. un dieci o un quadri
7. né un quattro né un picche

Soluzione 1 1. un asso

$$P\{\text{asso}\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad (8)$$

2. un fante di cuori

$$P\{\text{fante di cuori}\} = \frac{1}{52} \quad (9)$$

3. un tre di picche o un sei di fiori

$$P\{\text{un tre di picche o un sei di fiori}\} = P\{3P + 6F\} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \quad (10)$$

4. un cuori

$$P\{\text{cuori}\} = P\{C\} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad (11)$$

5. un seme diverso da cuori

$$P\{\text{cuori}\} = P\{\bar{C}\} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4} \quad (12)$$

6. un dieci o un quadri

$$P\{\text{un dieci o un quadri}\} = P\{10 + Q\} = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \quad (13)$$

7. né un quattro né un picche

$$\begin{aligned} P\{\text{né un quattro né un picche}\} &= P\{\bar{4P}\} \\ &= P\{4 + \bar{P}\} \\ &= 1 - P\{4 + P\} \\ &= 1 - \frac{4 + 13 - 1}{52} \\ &= 1 - \frac{16}{52} \\ &= \frac{9}{13} \end{aligned} \quad (14)$$

1.2 Probabilità combinatoria

Teoria 2 Fattoriale

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 21 \quad (15)$$

es.:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

e' il modo di ordinare n elementi distinguibili, es.:

$$(1, 2), (2, 1) \rightarrow 2! = 2$$

$$(1, 2, 3), (2, 1, 3); (2, 3, 1), (3, 2, 1); (3, 1, 2), (1, 3, 2) \rightarrow 3! = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (1, 3, 4, 2), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 2, 1) \\ &(2, 3, 4, 1), (3, 2, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (4, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 2), (1, 4, 3, 2) \\ &(3, 4, 1, 2), (4, 3, 1, 2), (3, 1, 2, 4), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3), (2, 1, 4, 3) \\ &(4, 1, 2, 3), (1, 4, 2, 3), (4, 2, 3, 1), (2, 4, 3, 1), (2, 3, 1, 4), (3, 2, 1, 4) \end{aligned} \rightarrow 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dimostrazione: Equivale ad enumerare i modi con cui si possono mettere n elementi distinguibili in n posizioni diverse. Posto il primo elemento su n , per le rimanenti $n-1$ posizioni rimangono $n-1$ elementi da sistemare. Inoltre avendo s modi di sistemare degli elementi e r modi di sistemare altri elementi, il modo per sistemarli complessivamente risulta sr . Quindi applicando ricorsivamente il ragionamento a tutte le n posizioni segue il risultato.

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (16)$$

Il coefficiente binomiale indica il modo in cui è possibile raggruppare n elementi in gruppi di k elementi.

Dimostrazione: il numero di possibili modi di mettere n elementi in k posizioni è $\frac{n!}{(n-k)!}$, devo ora dividere per il numero di permutazioni dei k posti, poiché non ha importanza l'ordine interno al gruppo, quindi divido per $k!$, in complesso $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Potenza n -esima

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (17)$$

Casi particolari

- $a = 1, b = 1$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad (18)$$

- $a = p, b = 1 - p, 0 \leq p \leq 1$

$$1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (19)$$

Esercizio 2 In quanti modi 10 persone possono sedersi su una panchina da 4 posti?

Soluzione 2

$$10(10-1)(10-2)(10-3) = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040 \quad (20)$$

Esercizio 3 In quanti modi possono essere disposte in file 5 palline di colori diversi?

Soluzione 3 $5! = 120$

Esercizio 4 In quanti modi si puo' formare una commissione di 3 uomini e 2 donne scelti tra 7 uomini e 5 donne?

Soluzione 4

$$\binom{7}{3} \binom{5}{2} = 350 \quad (21)$$

Esercizio 5 Calcolare la probabilità che, estraendo contemporaneamente due carte da un mazzo da 52 carte, si ottengono 2 assi

Soluzione 5 • casi favorevoli: i modi di accoppiare due assi su 4 $\rightarrow \binom{4}{2}$

- casi totali: i modi di accoppiare due carte su 52 $\rightarrow \binom{52}{2}$

$$\binom{4}{2} / \binom{52}{2} = 6/1326 \quad (22)$$

1.3 Probabilità totale, condizionata, teorema di Bayes, eventi indipendenti

Teoria 3 Probabilità condizionata, dati due eventi si definisce la probabilità condizionata di B dato A come

$$P\{B|A\} = \frac{P\{B \cap A\}}{P\{A\}} = \frac{P\{BA\}}{P\{A\}} \quad (23)$$

Probabilità totale

$$P\{B\} = P\{B|A_1\}P\{A_1\} + P\{B|A_2\}P\{A_2\} \quad (24)$$

con X lo spazio totale, $B, A_1, A_2 \subset X, A_1 A_2 = \{0\}$ e $A_1 + A_2 = X$

In generale data una partizione $A_i, i = 1, \dots, n$ dell'insieme X, ovvero tale che $\cup_{i=1}^n A_i = X$ e $A_i \cap A_j = \{0\}, i \neq j$ allora

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^n P\{B|A_i\}P\{A_i\} \quad (25)$$

Teorema di Bayes,

$$P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\}P\{B\}}{P\{A\}} \quad (26)$$

Due eventi $A, B \subset X$ sono indipendenti se

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$$

Nota come se due eventi hanno intersezione nulla, $A \cap B = 0$, non implica che i due eventi siano indipendenti

Esercizio 6 Un'urna contiene 4 palline bianche e 2 nere; un'altra urna contiene 3 palline bianche e 5 nere. Si estraiga 1 pallina da ciascuna urna e si determini la probabilità che:

1. entrambe le palline siano bianche
2. entrambe siano nere
3. una sia bianca ed una nera

Soluzione 6 Prima urna

$$4B, 2N, 6T \rightarrow P\{B\} = \frac{4}{6}, P\{N\} = \frac{2}{6}$$

Seconda urna

$$3B, 5N, 8T \rightarrow P\{B\} = \frac{3}{8}, P\{N\} = \frac{5}{8}$$

$$1. \quad P\{(B, B)\} = P\{1 = B\}P\{2 = B\} = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} \quad (27)$$

$$2. \quad P\{(N, N)\} = P\{1 = N\}P\{2 = N\} = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8} \quad (28)$$

$$3. \quad \begin{aligned} P\{(B, N) + (N, B)\} &= P\{1 = B\}P\{2 = N|1 = B\} + P\{1 = N\}P\{2 = B|1 = N\} \\ &= P\{1 = B\}P\{2 = N\} + P\{1 = N\}P\{2 = B\} \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned} \quad (29)$$

Esercizio 7 Tre macchine A, B e C producono rispettivamente il 50 %, il 30 % e il 20% del numero totale di pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di pezzi difettosi di queste macchine sono, rispettivamente, il 3%, il 4% ed il 5%. Determinare la probabilità che un pezzo estratto a caso:

1. sia difettoso
2. sia stato prodotto dalla macchina A , sapendo che è difettoso

Soluzione 7 1. $D = \{ \text{prob. che il pezzo sia difettoso} \}$

$$\begin{aligned} P\{D\} &= P\{D|A\}P\{A\} + P\{D|B\}P\{B\} + P\{D|C\}P\{C\} \quad (30) \\ &= .03 \cdot 0.5 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2 = 0.037 \quad (31) \end{aligned}$$

2.

$$P\{A|D\} = \frac{P\{D|A\}P\{A\}}{P\{D\}} = \frac{0.03 \cdot 0.5}{0.037} = 0.4054 \quad (32)$$

Esercizio 8 In un certo collegio il 4% dei maschi e l'1 % delle femmine sono piu' alti di 1.83 m. Inoltre il 60 % degli studenti sono femmine. Ora se uno studente viene scelto a caso ed è piu' alto di 1.83 m, qual è la probabilità che sia femmina?

Soluzione 8 $H = \{ \text{altezza} > 1.83m \}$

$$P\{F|H\} = \frac{P\{H|F\}P\{F\}}{P\{H|F\}P\{F\} + P\{H|M\}P\{M\}} = \frac{0.01 \cdot 0.6}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.4} = \frac{3}{11}$$