Teoria dei Segnali - Esercitazioni

Francesco Alesiani, Gabriella Olmo

February 19, 2002

1 Esercitzione

1.1 Probabilità come misura, definizione assiomatica

Teoria 1 *Probabilità come misura di un evento espressa come rapporto tra numero di casi favorevoli su casi totali*

$$\mathrm{P}\left\{A\right\} = \frac{\text{n. casi in cui l'evento } A \text{ si verifica}}{\text{n. casi totali}} \tag{1}$$

- $$\mathrm{P}\left\{A \cup B\right\} = \mathrm{P}\left\{A\right\} + \mathrm{P}\left\{B\right\} - \mathrm{P}\left\{A \cap B\right\} \tag{2}$$
- $A \cap B = \{0\}$
  $$\mathrm{P}\left\{A \cup B\right\} = \mathrm{P}\left\{A\right\} + \mathrm{P}\left\{B\right\} \tag{3}$$
- $A, B = X - A = A^c$
  $$(X - A) \cap A = 0, (X - A) \cup A = X$$
  $$\mathrm{P}\left\{A^c\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{A\right\} \tag{4}$$
- $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$
- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
- $$\mathrm{P}\left\{A^c\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{A\right\}$$
  $$\mathrm{P}\left\{A^c \cap B^c\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{A \cup B\right\}$$
  $$\mathrm{P}\left\{A^c \cup B^c\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{A \cap B\right\}$$

Notazione:

$$A^C \leftrightarrow \bar{A}$$
$$A \cup B \leftrightarrow A + B$$

$$A \cap B \leftrightarrow AB$$

Legge di De Morgan

$$\mathrm{P}\left\{\overline{A + B}\right\} = \mathrm{P}\left\{\bar{A}\bar{B}\right\} \tag{5}$$
$$\mathrm{P}\left\{\overline{AB}\right\} = \mathrm{P}\left\{\bar{A} + \bar{B}\right\} \tag{6}$$
$$\mathrm{P}\,\bar{\{A\}} = \mathrm{P}\left\{\bar{A}\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{A\right\} = \mathrm{P}\left\{X - A\right\} \tag{7}$$

dove $A, B \subset X$ e X è lo spazio totale.

Esercizo 1 *Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Determinare la probabilità che sia:*

1. *un asso*

2. *un fante di cuori*
3. *un tre di picche o un sei di fiori*
4. *un cuori*
5. *un seme diverso da cuori*
6. *un dieci o un quadri*
7. *né un quattro né un picche*

Soluzione 1 1. *un asso*

$$\mathrm{P}\{\text{asso}\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \tag{8}$$

2. *un fante di cuori*

$$\mathrm{P}\{\text{fante di cuori}\} = \frac{1}{52} \tag{9}$$

3. *un tre di picche o un sei di fiori*

$$\mathrm{P}\{\text{un tre di picche o un sei di fiori}\} = \mathrm{P}\{3P + 6F\} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \tag{10}$$

4. *un cuori*

$$\mathrm{P}\{\text{cuori}\} = \mathrm{P}\{C\} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \tag{11}$$

5. *un seme diverso da cuori*

$$\mathrm{P}\{\text{cu}\bar{\text{o}}\text{ri}\} = \mathrm{P}\{\bar{C}\} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4} \tag{12}$$

6. *un dieci o un quadri*

$$\mathrm{P}\{\text{un dieci o un quadri}\} = \mathrm{P}\{10 + Q\} = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \tag{13}$$

7. *né un quattro né un picche*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\text{né un quattro né un picche}\} &= \mathrm{P}\{\bar{4}\bar{P}\} \\
&= \mathrm{P}\{4 \bar{+} P\} \\
&= 1 - \mathrm{P}\{4 + P\} \\
&= 1 - \frac{4 + 13 - 1}{52} \\
&= 1 - \frac{16}{52} \\
&= \frac{9}{13}
\end{aligned} \tag{14}$$

1.2 Probabilità combinatoria

Teoria 2 *Fattoriale*

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 21 \tag{15}$$

es.:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

e' il modo di ordinare n *elementi distinguibili, es.:*

$$(1,2),(2,1) \rightarrow 2! = 2$$

$$(1,2,3),(2,1,3);(2,3,1),(3,2,1);(3,1,2),(1,3,2) \rightarrow 3! = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\begin{matrix}
(1,2,3,4),(2,1,3,4),(1,3,4,2),(3,1,4,2),(3,4,2,1),(4,3,2,1) \\
(2,3,4,1),(3,2,4,1),(2,4,1,3),(4,2,1,3),(4,1,3,2),(1,4,3,2) \\
(3,4,1,2),(4,3,1,2),(3,1,2,4),(1,3,2,4),(1,2,4,3),(2,1,4,3) \\
(4,1,2,3),(1,4,2,3),(4,2,3,1),(2,4,3,1),(2,3,1,4),(3,2,1,4)
\end{matrix} \rightarrow 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dimostrazione: Equivale ad enumerare i modi con cui si possono mettere n *elementi distinguibili in* n *posizioni diverse. Posto il primo elemento su* n*, per le rimanenti* $n-1$ *posizioni rimangono* $n-1$ *elementi da sistemare. Inoltre avendo* s *modi di sistemare degli elementi e* r *modi di sistemare altri elementi, il modo per sistemarli complessivamente risulta* sr*. Quindi applicando ricorsivamente il ragionamento a tutte le* n *posizioni segue il risultato.*

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{16}$$

Il coefficiente binomiale indica il modo in cui è possibile raggruppare n *elementi in gruppi di* k *elementi.*

Dimostrazione: il numero di possibili modi di mettere n *elementi in* k *posizioni è* $\frac{n!}{(n-k)!}$*, devo ora dividere per il numero di permutazioni dei* k*posti, poiché non ha importanza l'ordine interno al gruppo, quindi divido per* $k!$*, in complesso* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Potenza n-esima

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{17}$$

Casi particolari

- $a = 1, b = 1$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{18}$$

- $a = p, b = 1-p, 0 \leq p \leq 1$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{19}$$

Esercizo 2 *In quanti modi 10 persone possono sedersi su una panchina da 4 posti?*

Soluzione 2

$$10(10-1)(10-2)(10-3) = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040 \tag{20}$$

Esercizo 3 *In quanti modi possono essere disposte in file 5 palline di colori diversi?*

Soluzione 3 *5! = 120*

Esercizo 4 *In quanti modi si puo' formare una commissione di 3 uomini e 2 donne scelti tra 7 uomini e 5 donne?*

Soluzione 4

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} = 350 \tag{21}$$

Esercizo 5 *Calcolare la probabilità che, estraendo* contemporaneamente *due carte da un mazzo da 52 carte, si ottengono 2 assi*

Soluzione 5

- *casi favorevoli: i modi di accoppiare due assi su 4* $\rightarrow \binom{4}{2}$
- *casi totali: i modi di accoppiare due carte su 52* $\rightarrow \binom{52}{2}$

$$\binom{4}{2} / \binom{52}{2} = 6/1326 \tag{22}$$

1.3 Probabilità totale, condizionata, teorema di Bayes, eventi indipendenti

Teoria 3 *Probabilità condizionata, dati due eventi si definisce la probabilità condizionata di B dato A come*

$$\mathrm{P}\{B|A\} = \frac{\mathrm{P}\{B \cap A\}}{\mathrm{P}\{A\}} = \frac{\mathrm{P}\{BA\}}{\mathrm{P}\{A\}} \tag{23}$$

Probabilità totale

$$\mathrm{P}\{B\} = \mathrm{P}\{B|A_1\}\mathrm{P}\{A_1\} + \mathrm{P}\{B|A_2\}\mathrm{P}\{A_2\} \tag{24}$$

con X lo spazio totale, $B, A_1, A_2 \subset X$, $A_1A_2 = \{0\}$ e $A_1 + A_2 = X$

In generale data una partizione $A_i, i = 1, \ldots, n$ dell'insieme X, ovvero tale che $\cup_{i=1}^{n} A_i = X$ e $A_i \cap A_j = \{0\}, i \neq j$ allora

$$\mathrm{P}\{B\} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\{B|A_i\}\mathrm{P}\{A_i\} \tag{25}$$

Teorema di Bayes,

$$\mathrm{P}\{B|A\} = \frac{\mathrm{P}\{A|B\}\mathrm{P}\{B\}}{\mathrm{P}\{A\}} \tag{26}$$

Due eventi $A, B \subset X$ sono indipendenti se

$$\mathrm{P}\{A \cap B\} = \mathrm{P}\{A\}\mathrm{P}\{B\}$$

Nota come se due eventi hanno intersezione nulla, $A \cap B = 0$, non implica che i due eventi siano indipendenti

Esercizo 6 *Un'urna contiene 4 palline bianche e 2 nere; un'altra urna contiene 3 palline bianche e 5 nere. Si estragga 1 pallina da ciascuna urna e si determini la probabilità che:*

1. *entrambe le palline siano bianche*
2. *entrambe siano nere*
3. *una sia bianca ed una nera*

Soluzione 6 *Prima urna*

$$4B, 2N, 6T \rightarrow \mathrm{P}\{B\} = \frac{4}{6}, \mathrm{P}\{N\} = \frac{2}{6}$$

Seconda urna

$$3B, 5N, 8T \rightarrow \mathrm{P}\{B\} = \frac{3}{8}, \mathrm{P}\{N\} = \frac{5}{8}$$

1. $$\mathrm{P}\{(B,B)\} = \mathrm{P}\{1 = B\}\mathrm{P}\{2 = B\} = \frac{4}{6}\frac{3}{8} \tag{27}$$

2. $$\mathrm{P}\{(N,N)\} = \mathrm{P}\{1 = N\}\mathrm{P}\{2 = N\} = \frac{2}{6}\frac{5}{8} \tag{28}$$

3. $$\begin{aligned} \mathrm{P}\{(B,N)+(N,B)\} &= \mathrm{P}\{1 = B\}\mathrm{P}\{2 = N|1 = B\} + \mathrm{P}\{1 = N\}\mathrm{P}\{2 = B|1 = N\} \\ &= \mathrm{P}\{1 = B\}\mathrm{P}\{2 = N\} + \mathrm{P}\{1 = N\}\mathrm{P}\{2 = B\} \\ &= \frac{4}{6}\frac{5}{8} + \frac{2}{6}\frac{3}{8} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned} \tag{29}$$

Esercizo 7 *Tre macchine A,B e C producono rispettivamente il 50 %, il 30 % e il 20% del numero totale di pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di pezzi difettosi di queste macchine sono, rispettivamente, il 3%, il 4% ed il 5%. Determinare la probabilità che un pezzo estratto a caso:*

1. *sia difettoso*
2. *sia stato prodotto dalla macchina A, sapendo che è difettoso*

Soluzione 7 1. $D = \{$ *prob. che il pezzo sia difettoso* $\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{D\} &= \mathrm{P}\{D|A\}\mathrm{P}\{A\} + \mathrm{P}\{D|B\}\mathrm{P}\{B\} + \mathrm{P}\{D|C\}\mathrm{P}\{C\} \quad (30) \\ &= .03 \cdot 0.5 + 0.04 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2 = 0.037 \quad (31) \end{aligned}$$

2.

$$\mathrm{P}\{A|D\} = \frac{\mathrm{P}\{D|A\}\mathrm{P}\{A\}}{\mathrm{P}\{D\}} = \frac{0.03 \cdot 0.5}{0.037} = 0.4054 \quad (32)$$

Esercizo 8 *In un certo collegio il 4% dei maschi e l'1 % delle femmine sono piu' alti di 1.83 m. Inoltre il 60 % degli studenti sono femmine. Ora se uno studente viene scelto a caso ed è piu' alto di 1.83 m, qual è la probabilità che sia femmina?*

Soluzione 8 $H = \{$ *altezza* $>$ *1.83m* $\}$

$$\mathrm{P}\{F|H\} = \frac{\mathrm{P}\{H|F\}\mathrm{P}\{F\}}{\mathrm{P}\{H|F\}\mathrm{P}\{F\} + \mathrm{P}\{H|M\}\mathrm{P}\{M\}} = \frac{0.01 \cdot 0.6}{0.01 \cdot 0.6 + 0.04 \cdot 0.4} = \frac{3}{11}$$