Teoria dei Segnali
Diploma teledidattico
Secondo esonero – 4 marzo 1998

Esercizio 1 Si determini la trasformata di Fourier del segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t - nT)$$

dove $r(t)$ è una rampa di durata T:

$$r(t) = \begin{cases} t/T & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 2 Il segnale $x(t) = A\cos^2(\pi t/T)$ è posto all'ingresso di un sistema lineare, causale e con risposta all'impulso triangolare di ampiezza unitaria e durata $T/2$. Calcolare il segnale di uscita $y(t)$.

Esercizio 3 Un processo di rumore gaussiano bianco, $n(t)$, con densità spettrale di potenza costante $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$, attraversa un sistema LTI la cui funzione di trasferimento $H(f)$ è uguale ad 1 nella banda $[-B, B]$ e nulla altrove. Sia $y(t)$ il processo all'uscita del sistema.

a) Calcolare la funzione di autocorrelazione e la potenza del processo casuale $y(t)$

b) È possibile ottenere due variabili casuali *indipendenti* campionando $y(t)$ in due opportuni istanti di tempo?

c) (*Facoltativo*) Determinare la densità di probabilità di $y(t)$ e calcolare le probabilità $P\{y(t) > 0\}$ e $P\{y(t) > 1\}$.

Nota : Per risolvere gli esercizi possono essere di aiuto i seguenti risultati:

$$\int x e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x}\left[\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2} dx = |\, m \,| \frac{\pi}{2}$$

Si ricordano inoltre le definizioni di *funzione di errore* e di *funzione di errore complementare*

$$\text{erf(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$
$$\text{erfc(x)} = 1 - \text{erf(x)}$$

Teoria dei Segnali

Diploma teledidattico - sede di Torino

Secondo esonero – 4 marzo 1998

Soluzione Proposta

Esercizio 1 Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T, dunque la sua trasformata di Fourier è per definizione:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}$$

dove

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_0^T r(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Sostituendo l'espressione di $r(t)$ nell'integrale e svolgendo i conti, si ottiene:

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{j}{2n\pi} & n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \end{cases}$$

Osservando che $\mu_n = \mu_{-n}$, la serie di Fourier diventa:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left(e^{j\frac{2\pi}{T}nt} - e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} \right) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Esercizio 2 L'uscita del sistema $y(t)$ è l'antitrasformata di Fourier di

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

dove $X(f)$ ed $H(f)$ sono, rispettivamente, la trasformata di Fourier del segnale in ingresso e la funzione di trasferimento del sistema lineare.

Dalle definizioni del testo $X(f)$ risulta avere la seguente espressione:

$$X(f) = F\left\{x(t)\right\} = \frac{A}{2} F\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{T}t\right\} = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{4}\left[\delta\left(f - 1/T\right) + \delta\left(f + 1/T\right)\right]$$

$H(f)$ invece si calcola come trasformata di Fourier di una funzione triangolare causale:

$$H(f) = F\left\{q(t - T/4)\right\} = Q(f)e^{-j\pi fT/2} = \frac{T}{4}\frac{\sin^2(\pi fT/4)}{(\pi fT/4)^2} e^{-j\pi fT/2}$$

avendo indicato con $q(t)$ la funzione triangolare di altezza unitaria e supporto $[-T/4, T/4]$.

Il prodotto di $X(f)$ ed $H(f)$ appena trovate, dà:

$$Y(f) = \frac{A}{2}H(0)\delta(f) + \frac{A}{4}\left[H\left(+\frac{1}{T}\right)\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + H\left(-\frac{1}{T}\right)\delta\left(f + \frac{1}{T}\right)\right]$$

Calcolando i valori di $H(f)$ per $f = \{0, 1/T, -1/T\}$ si giunge all'espressione finale di $Y(f)$:

$$Y(f) = \frac{AT}{8}\left\{\delta(f) - j\frac{4}{\pi^2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)\right]\right\}$$

che, antitrasformata, dà:

$$y(t) = \frac{AT}{8}\left\{1 + \frac{8}{\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right\}$$

Esercizio 3 *a)* La densità spettrale di potenza del processo in uscita $y(t)$ vale per definizione

$$G_y(f) = G_n(f) \mid H(f) \mid^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \mid f \mid \leq B \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La funzione di autocorrelazione di $y(t)$ è l'antitrasformata di Fourier di $G_y(f)$:

$$R_y(\tau) = N_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

La potenza di $y(t)$ si può calcolare integrando la densità spettrale di potenza oppure valutando $R_y(0)$:

$$P_y = R_y(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f)df = N_0 B$$

b) Siccome il processo casuale $y(t)$ è ottenuto da una *trasformazione lineare* del processo *Gaussiano* $x(t)$, anche $y(t)$ risulta essere Gaussiano. Per estrarre da $y(t)$ due variabili casuali indipendenti, allora, è sufficiente campionare $y(t)$ agli istanti t_0 e $t_0 + \overline{\tau}$, in modo che $y(t_0)$ e $y(t_0 + \overline{\tau})$ siano variabili casuali incorrelate (se due variabili casuali Gaussiane sono incorrelate, allora sono anche indipendenti). Perché ciò accada, $\overline{\tau}$ deve essere tale che $R_y(\overline{\tau}) = 0$ e quindi $\overline{\tau}$ deve essere uno zero della funzione di autocorrelazione di $R_y(\tau)$. I possibili valori di $\overline{\tau}$ sono allora

$$\overline{\tau} = \frac{n}{2B} \; (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

c) $y(t)$ è un processo casuale Gaussiano a valor medio nullo e varianza $\sigma^2 = P_y = N_0 B$. Le probabilità cercate, allora, valgono:

$$P\{y(t) > 0\} = \frac{1}{2}$$

e

$$P\{y(t) > 1\} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2N_0B}}}{\sqrt{2\pi N_0 B}} du = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{e^{-\frac{u^2}{2N_0B}}}{\sqrt{2\pi N_0 B}} du = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{2N_0B}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \text{erfc} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2N_0 B}} \right\}$$