Teoria dei Segnali

Diploma teledidattico - sede di Torino

Primo appello – 19 marzo 1998

Esercizio 1 Si consideri il sistema di trasmissione rappresentato nella figura 1. Il modulatore associa ai due simboli x_1, x_2 emessi dalla sorgente i livelli di tensione $+A$ e $-A$ rispettivamente. Un rumore, rappresentato dalla variabile casuale ν uniformemente distribuita tra $-2A$ e $+2A$, si somma all'uscita del modulatore. Il dispositivo di decisione opera nel seguente modo: se il livello ricevuto è superiore ad una soglia $+\delta$ $(0 < \delta < A)$, decide per x_1 se invece il livello ricevuto è inferiore alla soglia $-\delta$, decide per x_2 mentre se la tensione ricevuta cade tra $-\delta$ e $+\delta$, non decide per alcun simbolo e scarta il dato ricevuto.

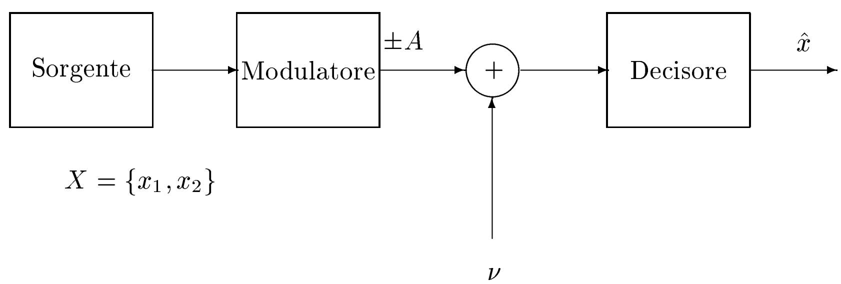

Figure 1: Sistema di trasmissione.

Questo sistema di trasmissione può essere rappresentato con il canale binario a cancellazione (BEC – *Binary Erasure Channel*) della figura 2. In ingresso al BEC ci sono i due simboli dell'alfabeto di sorgente x_1, x_2 ed in uscita i tre simboli y_1, y_2, y_3. Le uscite y_1, y_2 corrispondono rispettivamente ai due simboli di ingresso x_1, x_2 mentre il terzo simbolo, y_3, è l'uscita ambigua che viene scartata e non permette di prendere nessuna decisione sul simbolo trasmesso.

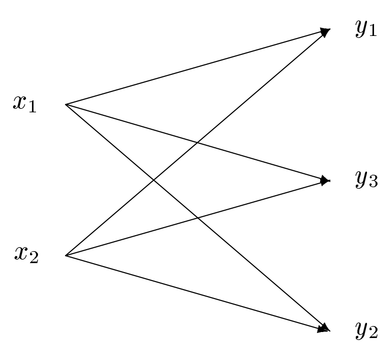

Figure 2: Modello di canale BEC.

Si chiede di

a) determinare le espressioni analitiche delle probabilità di transizione del canale BEC ;

b) calcolare la probabilità di scartare il simbolo ricevuto se i simboli di sorgente sono equiprobabili.

Esercizio 2 Si consideri il segnale $x(t)$ strettamente limitato in banda a $B = 5$ kHz e si costruisca il segnale $y(t)$ così definito:

$$y(t) = x(t) + x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

dove f_0 vale 1 MHz. Volendo applicare il teorema del campionamento a $y(t)$, determinare quale è il minimo valore della frequenza di campionamento f_c.

Teoria dei Segnali

Diploma teledidattico - sede di Torino

Primo appello – 19 marzo 1998

Soluzione Proposta

Esercizio 1 Per la simmetria del problema, le probabilità di transizione del canale godono delle seguenti proprietà:

$$P\{y_1 \mid x_1\} = P\{y_2 \mid x_2\}$$
$$P\{y_2 \mid x_1\} = P\{y_1 \mid x_2\}$$
$$P\{y_3 \mid x_1\} = P\{y_3 \mid x_2\}$$

inoltre

$$P\{y_3 \mid x_1\} = 1 - P\{y_1 \mid x_1\} - P\{y_2 \mid x_1\}$$

a) Le probabilità cercate si calcolano nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P\{y_1 \mid x_1\} &= P\{\nu + A > \delta\} = P\{\nu > \delta - A\} = \int_{\delta - A}^{2A} \frac{dx}{4A} = \frac{3A - \delta}{4A} \\ P\{y_2 \mid x_1\} &= P\{\nu + A < -\delta\} = P\{\nu < -\delta - A\} = \int_{-2A}^{-\delta - A} \frac{dx}{4A} = \frac{A - \delta}{4A} \\ P\{y_3 \mid x_1\} &= 1 - \frac{3A - \delta}{4A} - \frac{A - \delta}{4A} = \frac{2\delta}{4A} \end{aligned}$$

b) La probabilità di scartare il simbolo ricevuto è

$$P\{y_3\} = P\{y_3 \cap x_1\} + P\{y_3 \cap x_2\} = P\{y_3 \mid x_1\}P\{x_1\} + P\{y_3 \mid x_2\}P\{x_2\} = \frac{2\delta}{4A}$$

Esercizio 2 La minima frequenza di campionamento è $f_{c(min)} = 2f_{max}$, dove f_{max} è la frequenza della componente armonica a frequenza più alta presente nel segnale $y(t)$. Dalle proprietà della trasformata di Fourier, si ottiene facilmente la seguente espressione per $Y(f)$:

$$Y(f) = X(f) + \frac{1}{2}\left[X(f - f_0) + X(f + f_0)\right]$$

Poiché $X(f) = 0$ per $\mid f \mid > B$, la massima frequenza di $Y(f)$ risulta $f_{max} = f_0 + B$ da cui:

$$f_{c(min)} = 2f_{max} = 2010 \text{ kHz}$$