Politecnico di Torino

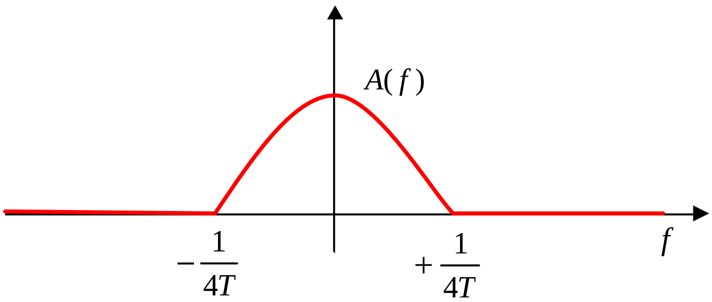
Corsi Universitari a Distanza in Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Teoria dei segnali
Tema d'esame 12/03/2005 - soluzioni

Esercizio n. 1

$$y(t) = a(t)\cos(2pf_0 t) + a(t-T)\sin(2pf_0 t)$$

$$A(f) = \begin{cases} \cos(2pfT) & -\frac{1}{4T} < f < \frac{1}{4T} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

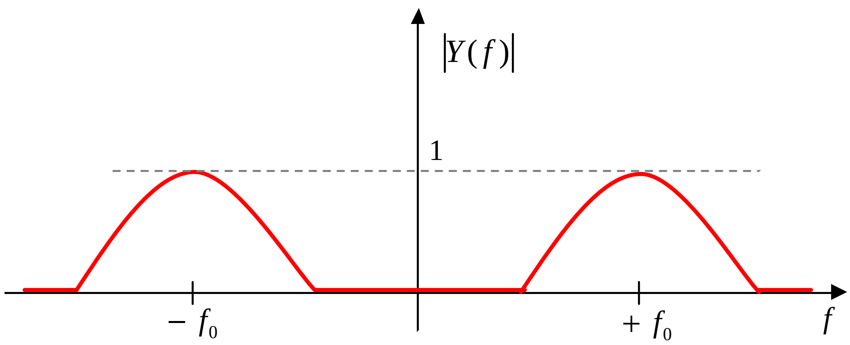


$$F\{y(t)\} = A(f) * \left[\frac{1}{2}d(f-f_0) + \frac{1}{2}d(f+f_0)\right] + A(f)e^{-j2pfT} * \left[\frac{1}{2j}d(f-f_0) - \frac{1}{2j}d(f+f_0)\right]$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}A(f-f_0) + \frac{1}{2}A(f+f_0) + \frac{1}{2}A(f-f_0)e^{-j\left(2pfT+\frac{p}{2}\right)} - \frac{1}{2}A(f+f_0)e^{-j\left(2pfT+\frac{p}{2}\right)} =$$

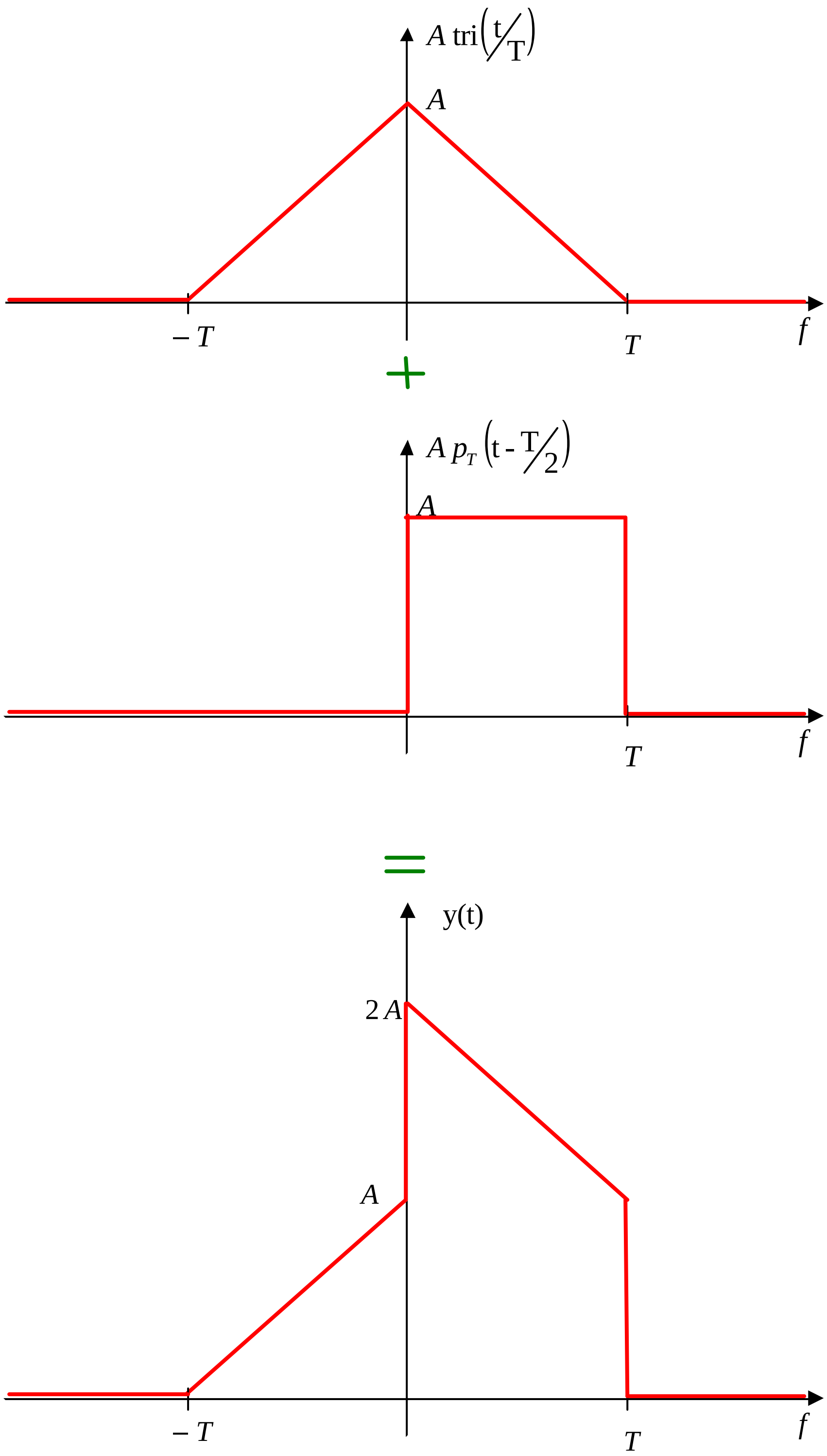
$$= \frac{1}{2}A(f-f_0) + \frac{1}{2}A(f+f_0) + \frac{1}{2}A(f-f_0)e^{-j\left(2pfT+\frac{p}{2}\right)} + \frac{1}{2}A(f+f_0)e^{-j\left(2pfT+\frac{3}{2}p\right)}$$

$y(t)$ è un segnale reale $\Rightarrow |Y(f)|$ è pari.



Esercizio n. 2

$y(t)$ può essere visto come la somma di un segnale triangolo e una porta traslata.

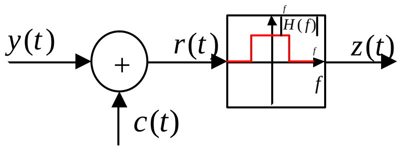


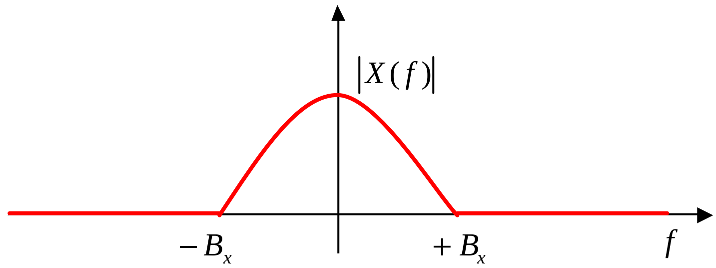
$$y(t) = A \cdot \mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) + p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} Y(f) &= F\{y(t)\} = A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}^2(fT) + A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(fT) \cdot e^{-j2pf\frac{T}{2}} \\ &= A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(fT) \cdot \left[\mathrm{sinc}(fT) + e^{jpfT}\right] \end{aligned}$$

Esercizio n. 3

$$y(t) = x(t)\cos(2pf_0 t)$$





Il segnale $r(t)$ in ingresso al filtro è dato dalla moltiplicazione del segnale in ingresso e del segnale locale.

Ricordando che:

$$\boxed{\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]}$$

$$\boxed{\cos(-f) = \cos(f)}$$

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

si ha:

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t)\left[\frac{1}{2}\cos(-f) + \frac{1}{2}\cos(4pf_0 t + f)\right] = \\ &= \frac{1}{2}x(t)\cos(f) + \frac{1}{2}x(t)\cos(4pf_0 t + f) = \\ &= \frac{1}{2}x(t)\cos(f) + \frac{1}{2}x(t)\left[\cos(4pf_0 t)\cos(f) - \sin(4pf_0 t)\sin(f)\right] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}x(t)\cos(f)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(f)\cos(4pf_0 t)}_{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\sin(f)x(t)\sin(4pf_0 t)}_{3} \end{aligned}$$

Come si vede, $r(t)$ è composto da tre termini: solo il primo, 1 , è in banda base. Gli altri due termini, 2 e 3 , rappresentano un segnale in banda traslata. Infatti, prendendo la trasformata di Fourier di $r(t)$, si ottiene:

$$R(f)=\underbrace{\frac{1}{2}\cos(f)X(f)}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2}\cos(f)\left[\frac{1}{2}X(f-2f_0)+\frac{1}{2}X(f+2f_0)\right]}_{2}+\underbrace{\frac{1}{2}\sin(f)\left[\frac{1}{2j}X(f-2f_0)+\frac{1}{2j}X(f+2f_0)\right]}_{3}$$

Il segnale in uscita $z(t)$ può essere trovato ricordando che:

$$z(t)=r(t)*h(t)$$

dove $h(t)$ è la risposta all'impulso del filtro. Quindi:

$$Z(f)=R(f)\cdot H(f)$$

Continuando a lavorare con la trasformata di Fourier dei segnali, si vede che:

$$Z(f)=\frac{1}{2}\cos(f)\cdot X(f)$$

Infatti i termini 2 e 3 vengono tagliati dal filtro. Si può scrivere:

$$z(t)=\frac{1}{2}\cos(f)x(t)$$

$$f=0\Rightarrow\cos(f)=1\Rightarrow z(t)=\frac{1}{2}x(t)$$

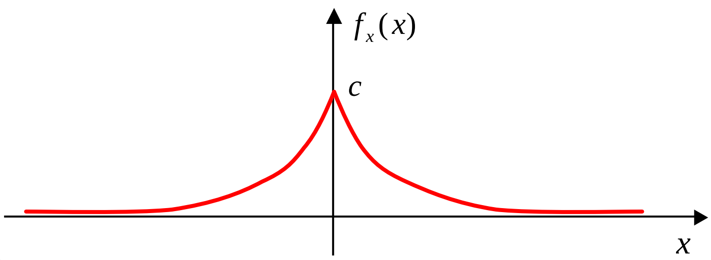
$$f=45°\Rightarrow\cos(f)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow z(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}x(t)$$

$$f=90°\Rightarrow\cos(f)=0\Rightarrow z(t)=0$$

La condizione migliore è $f=0$ perché consente di non perdere in potenza.

Esercizio n. 4

$$f_a(x)=c\cdot e^{-2|x|}$$



a) Perché $f_a(x)$ sia una d.d.p. occorre che:

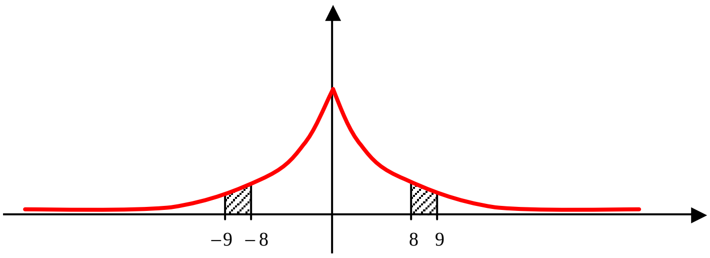
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_a(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 2\int_0^{+\infty}c\cdot e^{-2x}\mathrm{d}t=1$$

Attenzione : $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \ldots \mathrm{d}x$ perché $f_a(x)$ è una funzione pari.

$$- c\int_0^{+\infty} \text{- 2e}^{\text{-2x}} \mathrm{d}x = 1$$

$$- c\mathrm{e}^{\text{-2x}}\Big|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow -c[0-1] = 1 \Rightarrow c = 1$$

b) $P[\{|a| \leq 9\} \cap \{|a| \geq 8\}] = 2\int_8^9 e^{-2x} \mathrm{d}x = -e^{-2x}\Big|_8^9 = -\left[e^{-18} - e^{-16}\right] = e^{-16} - e^{-18}$



Esercizio n. 5

$$P(A|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dato che i due eventi sono indipendenti:

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|\,B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$