Prova scritta del 19 ottobre 1998
Traccia della soluzione

I esercizio
Sia $z(t)$ il segnale all'uscita del filtro ideale e $S_z(f)$ il suo spettro di potenza.

$$S_z(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

quindi, affinché $z(t)$ contenga tutte le componenti spettrali del segnale $x(t)$ è necessario scegliere $B \geq 4\ kHz$. Se $B < 4k\ Hz$ sullo spettro $S_z(f)$ risulteranno "tagliate" le frequenze più alte dello spettro $S_x(f)$.

Per minimizzare la distorsione in frequenza risulta necessario dunque scegliere il secondo amplificatore. Verifichiamo che la condizione $E = 2$ è migliore rispetto a $E = 1.5$ per quanto riguarda la distorsione in ampiezza.

La probabilità che il segnale $z(t)$ assuma valori di ampiezza in corrispondenza della zona di saturazione del dispositivo non lineare è:

$$P\{[z(t) > E] \cup [z(t) < -E]\} = P\{[z(t) > E]\} + P\{[z(t) < -E]\} =$$

$$= P\{[x(t) > E]\} + P\{[x(t) < -E]\} = 2P\{[z(t) > E]\}.$$

Conoscendo la densità di probabilità del processo $f_\xi(x)$

$$P\{[z(t) > E]\} = \int_E^{+\infty} f_\xi(x)dx$$

(cioè l'area sotto la curva di $f_\xi(x)$ da E in poi. Tale probabilità è tanto più bassa quanto E è grande quindi è meglio scegliere E=2 piuttosto che E=1.5.

II esercizio Applicando le proprietà delle trasformate di Fourier si trova che:

$$X(f) = \frac{1}{2}[A(f-f_0) + A(f+f_0)] + \frac{1}{2j}[A(f-f_0)e^{-j2\pi(f-f_0)T} + A(f+f_0)e^{-j2\pi(f+f_0)T}]$$

Si noti che $e^{-j2\pi f_0 T} = 1$ in quanto $f_0 = K/T$ e quindi

$$X(f) = \frac{1}{2}[A(f-f_0) + A(f+f_0)] - \frac{j}{2}[A(f-f_0)e^{-j2\pi fT} - A(f+f_0)e^{-j2\pi fT}]$$

Raccogliendo

$$X(f) = \frac{1}{2}A(f-f_0)(1 - je^{-j2\pi fT}) + \frac{1}{2}A(f+f_0)(1 + je^{-j2\pi fT})$$

Poiché $X(f)$ è una funzione pari e, data la forma di $A(f)$, lo spettro è fatto di due parti con supporto disgiunto, il calcolo del modulo può essere semplificato effettuandolo solo per la parte dello spettro posta sulle frequenze positive, $X^+(f)$.

$$|X^+(f)|^2 = \frac{1}{4}|A(f-f_0)|^2|(1 - je^{-j2\pi fT})|^2 =$$

$$\frac{1}{4}[A(f-f_0)]^2(1 - sin(2\pi fT) - jcos(2\pi fT)|^2 =$$

$$\frac{1}{4}[A(f-f_0)]^2(2 - 2sin(2\pi fT))$$

dunque:

$$|X^+(f)| = \frac{2}{\sqrt{2}}A(f-f_0)\sqrt{1 - sin(2\pi fT)}.$$