1° Esonero di Teoria dei Segnali del 4 febbraio 1994

<u>Esercizio 1</u> **(6 punti)**

Sia ξ un variabile casuale con densità di probabilità “esponenziale bilatera” e con varianza σ_ξ^2 unitaria.

a) Qual è l’espressione analitica della $f_\xi(x)$ e la media μ_ξ.

b) Disegnare la $f_\xi(x)$ in maniera quantitativa indicando il valore che assume per $x = 0$.

c) Calcolare il valore di x_0 tale per cui:

$$P\{|\xi| \leq x_0\}$$

<u>Esercizio 2</u> **(6 punti. Domanda e risposta)**

a) Dimostrare che $\sigma_\xi^2 = E[\xi^2] - \mu_\xi^2$ (dove $\mu_\xi = E[\xi]$).

b) Se $f\ (x)$ è una densità di probabilità simmetrica rispetto al valore $x_0 = 5$ calcolare μ_ξ, m_ξ e $F_\xi(5)$.

c) Dimostrare che due eventi disgiunti e non nulli A e B, non sono statisticamente indipendenti (B $\subseteq$ S).

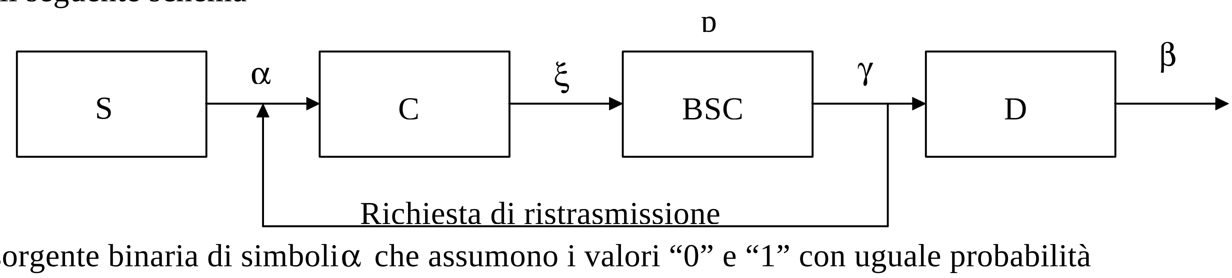
d) Una variabile casuale discreta assume i valori dell’insieme S= $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, con probabilità $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ rispettivamente. ($p_i = P\{\xi_i = x_i\}$). Quanto vale $E[\xi]$?

e) Estraendo due carte contemporaneamente da un mazzo di 40 carte, quanto vale la probabilità che esca un “Asso” e un “Re”?

f) Quali proprietà deve soddisfare la $f\ (x)$ di una variabile casuale ξ continua?

<u>Esercizio 3</u> **(13 punti)**

Sia dato il seguente schema



S è una sorgente binaria di simboli α che assumono i valori “0” e “1” con uguale probabilità

C è un codificatore che all'ingresso α associa i simboli X composti da due bit come segue (Codice di Parità)

α	X
0	00
1	11

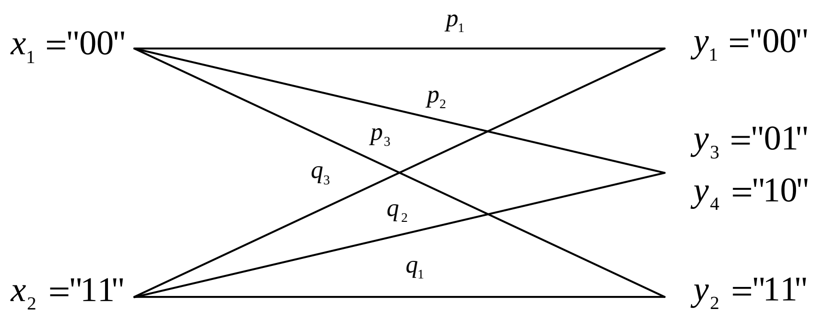
BSC è un canale binario simmetrico con probabilità di errore sul singolo bit par a p

D è il decisore con in ingresso i simboli Y ed uscita la v. c β, che funziona come segue:

Y	β
00	0
11	1
01 o 10	Richiesta di ritrasmissione

Domande:

1. A partire dal sistema dato calcolare la probabilità di transizione (in funzione di p) del canale così definito:



dove:

$$p_1 = P\{Y_1 | X_1\} \qquad q_1 = P\{Y_2 | X_2\}$$
$$p_2 = P\{Y_3 \cup Y_4 | X_1\} \qquad q_2 = P\{Y_3 \cup Y_4 | X_2\}$$
$$p_3 = P\{Y_2 | X_1\} \qquad q_3 = P\{Y_1 | X_2\}$$

2. Tenendo conto che ricevendo Y_3 e Y_4 si riconosce l'errore ed il decisore fà una richiesta di ritrasmissione, calcolare la P{ errore } in funzione di p del sistema complessivo, notando che si hanno tre eventi possibili:

   C = { Si riceve Y senza errori e si decide per β }

   R = { Si riconosce l'errore in Y e si richiede la ristrasmissione di X }

   N = { Non si riconosce l'errore in Y e si decide per β }.

3. Data $p = 10^{-2}$ calcolare la P{ errore } precedentemente ricavata e commentare il risultato.