1° Esonero di Teoria dei Segnali del 22 febbraio 1994

Esercizio 1 (7 punti)

1. (1 punto) Sia $x(t)$ un processo casuale con d.d.p.

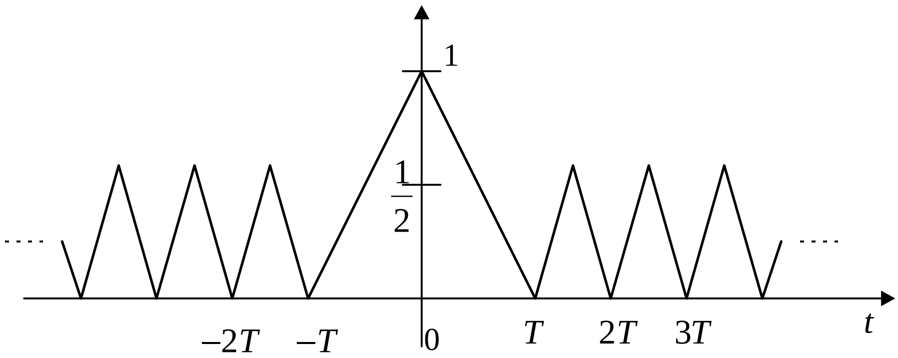
$$f\ \ (x) = \frac{1}{2}\delta(x - 2|t| + 2) + \frac{1}{2}\delta(x - 4|t| + 2)$$

ed autocovarianza

$$\sigma_x(t_1, t_2) = |t_1 \quad t_2|$$

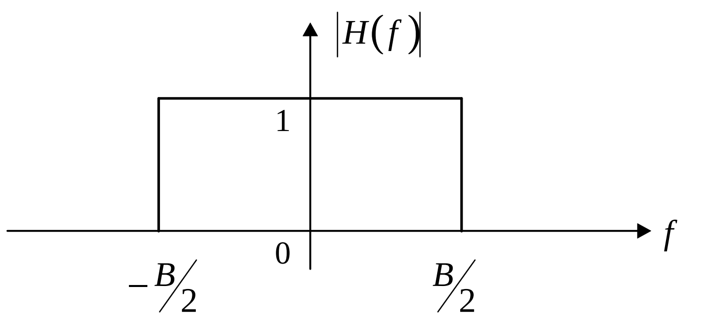
Discutere della stazionarietà di $x(t)$ senza fare calcoli.

2. (1 punto) Dire se la seguente funzione rappresenta la funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato (SSL)



3. (1 punto) Quali condizioni deve soddisfare la risposta all'impulso ideale unitario $h(t)$ perché il sistema che essa rappresenta sia un sistema L. T. I.(Linear Time Invariant) fisicamente realizzabile.

4. (2 punti) Calcolare la potenza (Watt) del rumore gaussiano bianco di densità spettrale di potenza $S_n(f) = N_0/2$ filtrato da un filtro ($H(f)$ figura in basso) ideale a porta con banda di frequenza pari a (Hertz). Quale è l'unità di misura di N_0 e che cosa potrebbe rappresentare?



5. (1 punto) Commentare sul significato energetico (o potenza) dei coefficienti (μ_n) dello sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$ segnale periodico, e dare l'espressione della sua potenza $P(x)$ (senza fare calcoli):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

6. (1 punto) Dimostrare che se

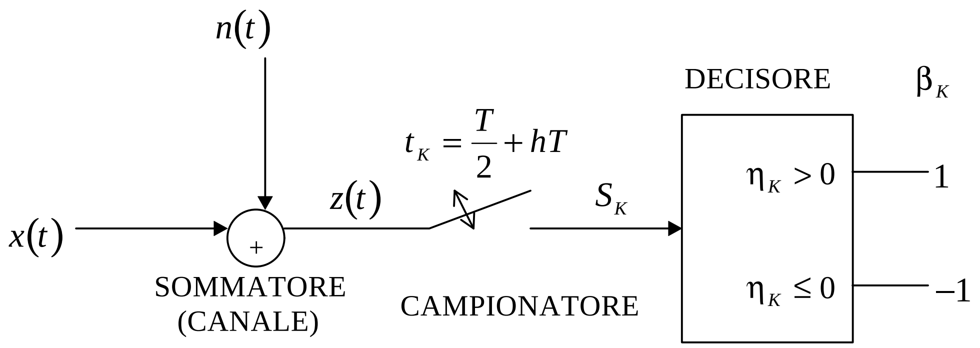
$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Allora:

$$\Im\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$$

Esercizio 2

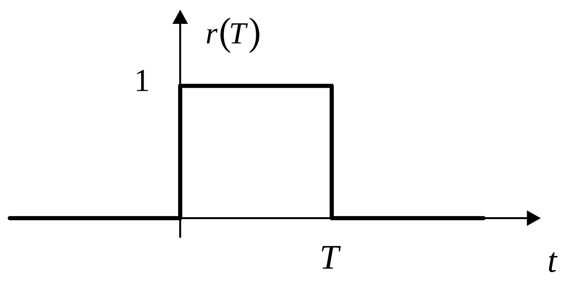
Sia dato il seguente sistema di trasmissione:



- dove

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)$$

$\alpha_i = 1$ oppure -1, con $P\{\alpha_i\} = 1/2$, ed:



- $n(t)$ sia un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza:

$$S_n(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & \text{per } |f| \le B/2 \\ \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

  dove N_0 è una costante reale positiva, e B è l'ampiezza di banda dove $S_n(f)$ è non nulla.

- $z(t) = x(t) + n(t)$ è un processo casuale.

- $t_K = T/2 + kT$ con $k \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ sia un istante di campionamento ideale (cioè di durata infinitesima) e dove si ottiene la variabile casuale

$$\xi_k = z(t_k)$$

- e l'ultimo blocco è un decisore che decide il valore di β_k in base al segno di ξ_k:

$$\begin{cases}\beta_k = 1 & \text{se } \xi_k > 0 \\ \\ \beta_k = -1 & \text{se } \xi_k \le 0\end{cases}$$

Domande

1. Calcolare la media di $z(t)$ e discutere sulla stazionarietà di $z(t)$ sapendo che il processo $x(t)$ ha una funzione di autocorrelazione data da:

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r(t_1 - iT)\, r(t_2 - iT)$$

2. Calcolare la media e la varianza del processo $n(t)$ e dire quale è la d.d.p. $f_{{}_0}(y)$ di $\eta_0 = n(t_0)$, dove t_0 è un istante noto.

3. Calcolare la potenza media del processo $z(t)$:

$$P(z) = E\left\{|z(t)|^2\right\}$$

4. Calcolare la media e la varianza della variabile casuale $_k$: e dare l'espressione generale della loro d.d.p. $f\ (z)$

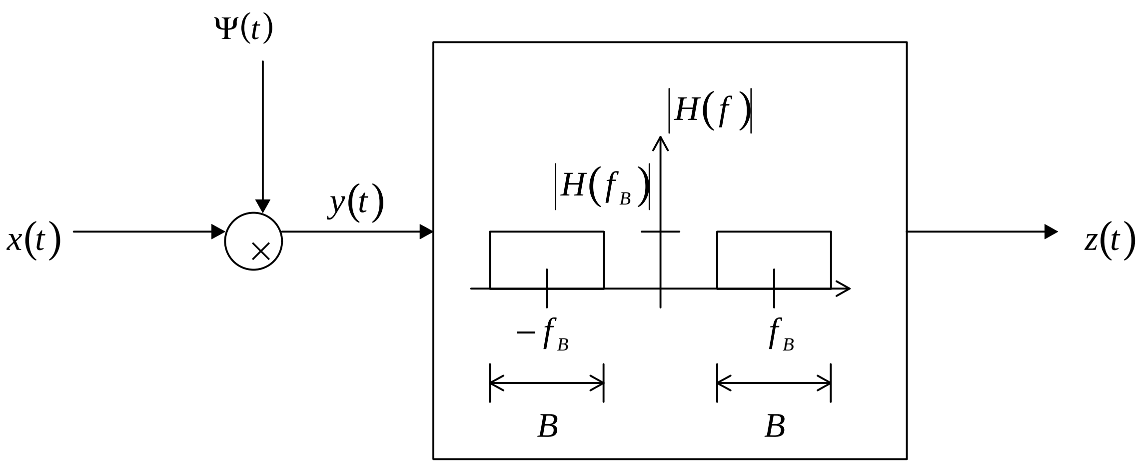
5. Calcolare l'espressione che la probabilità che il valore d$\beta_k = 1$ quando si è trasmesso un valore di $\alpha_k = -1$ (essa è la probabilità condizionata e rappresenta la probabilità di errore p di un canale di trasmissione BSC):

$$P\{\beta_k = 1 | \alpha_k = -1\}$$

6. (Extra) Prese due variabili casuali ξ_k e ξ_h con k≠h, dire per quali valori di $\tau = t_h - t_k$ le due variabili casuali sono statisticamente indipendenti. (Se non si riesce a calcolare τ, dare almeno un accenno su come si potrebbe procedere per il suo calcolo, e quale potrebbe essere il significato di queste τ che rendono indipendenti le variabili casuali così ottenute).

Esercizio 3

Sia dato il seguente sistema:



- dove

$$x(t) = \frac{sin\frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$$

- $\Psi(t) = A\cos 2\pi f_0 t$, con $f_0 = 10/T$.

- $H(f)$ è la funzione di trasferimento di un filtro descritto alla domanda numero 4

Domande:

1. Calcolare la costante A perché $\Psi(t)$ sia un segnale ad energia unitaria nel periodo $\left(-T/2, T/2\right)$.

2. Dire se il segnale $y(t) = x(t) \cdot \Psi(t)$ sia ad energia finita.

3. Se possibile, calcolare e disegnare lo spettro di energia di $Y(f)$.

4. Scegliere la banda B, il centro banda f_B e l'ampiezza $|H(f_B)|$ del filtro ideale $H(f)$ (rappresentato in figura), perché sia:

$$S_x(f) = S_y(f)$$

5. Che tipo di filtro è $H(f)$?

6. (Extra) Se $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, calcolare la nuova $Y(f)$ e la nuova $z(t)$, assumendo $H(f)$ come calcolata al punto 4.