



**Corso Teledidattico – Matematica I – Versione D**  
**18 gennaio 2003**

**Esercizio 1**

E' data la funzione definita sull'intervallo  $[-2,1]$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+25x^2} & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x \cdot \ln(x+1) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

a) Dire se  $f(x)$  è continua sull'intervallo  $[-2,1]$ .

Si tratta di una funzione definita "a tratti". Ciascuno dei due tratti è costituito da una funzione continua. Dobbiamo quindi verificare come i due tratti si raccordano nel punto  $x_0 = 0$ . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+25x^2} = 1;$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \cdot \ln(x+1) = 0.$$

Quindi, poiché  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , la funzione è discontinua nel punto  $x_0 = 0$ . Più precisamente, poiché  $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , la funzione nel punto  $x_0 = 0$  è continua da sinistra.

b) Dire se ad  $f(x)$  è applicabile il teorema di Lagrange sull'intervallo  $[-2,0]$ .

Il teorema di Lagrange è applicabile. Infatti, come si è già detto, la funzione è continua sull'intervallo  $[-2,0]$  (continua da destra in  $-2$  e continua da sinistra in  $0$ ). Poiché  $f(x)$  è anche derivabile su  $(-2,0)$ , sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Lagrange.

c) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione  $f(x)$  e l'asse delle  $x$ , per  $x$  che appartiene all'intervallo  $[-2,1]$ .

Indichiamo con  $A$  l'area richiesta. Cominciamo a studiare il segno della funzione. Si ha  $\frac{1}{1+25x^2} > 0 \quad \forall x$ ; inoltre, se  $x > 0$  si ha  $\ln(x+1) > 0$ , quindi per  $x \in (0,1]$  si ha  $2x \cdot \ln(x+1) > 0$ . In definitiva,  $f(x) > 0 \quad \forall x \in [-2,1]$ . Ne segue che  $A$  coincide con l'integrale definito di  $f(x)$  calcolato fra  $-2$  e  $1$ :

$$A = \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{1+25x^2} dx + \int_0^1 2x \cdot \ln(x+1) dx$$

Calcoliamo le primitive delle due funzioni integrande. Per il primo integrale, con sostituzione  $t = 5x$  (da cui si ricava  $dt = 5 \cdot dx$ ), si ha



**1 Tema d'esame**

$$\int \frac{1}{1+25x^2} dx = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \arctan(t) + c = \frac{1}{5} \arctan(5x) + c$$

Per il secondo integrale, integrando per parti si ha

$$\int 2x \cdot \ln(x+1) dx = x^2 \cdot \ln(x+1) - \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

Effettuando la divisione fra polinomi nell'integrale rimasto a secondo membro, si ottiene

$$\int 2x \cdot \ln(x+1) dx = x^2 \cdot \ln(x+1) - \int \left( x-1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = x^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} x^2 + x - \ln(x+1) + c$$

Quindi,

$$A = \left[ \frac{1}{5} \arctan(5x) \right]_{-2}^0 + \left[ (x^2 - 1) \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^1 = 0 - \frac{1}{5} \arctan(-10) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{5} \arctan(10) + \frac{1}{2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che  $\arctan$  è una funzione dispari, e quindi  $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ .

**Esercizio 2**

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{(2x-1)^3}{x^2}$$

a) Trovare il dominio, gli zeri ed il segno di  $f$ .

Dev'essere  $x \neq 0$ , quindi  $D = R - \{0\}$ . Gli unici zeri della funzione sono i valori di  $x$  che annullano il numeratore, quindi solo il valore  $x = \frac{1}{2}$ . Per quanto riguarda la determinazione del segno, osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi non influisce sul segno di  $f$ .

Il numeratore è invece maggiore di zero se  $2x-1 > 0$ , ovvero quando  $x > \frac{1}{2}$ . Si ha quindi che

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in \left( \frac{1}{2}, +\infty \right), \text{ mentre } f(x) < 0 \text{ per } x \in (-\infty, 0) \cup \left( 0, \frac{1}{2} \right) \text{ e } f(x) = 0 \text{ per } x = \frac{1}{2}.$$

b) Calcolarne i limiti agli estremi del dominio e indicare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Si ha:



**1 Tema d'esame**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)^3}{x^2} = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2x-1)^3}{x^2} = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2x-1)^3}{x^2} = -\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^3}{x^2} = +\infty \quad (4)$$

Dai limiti (2) e (3) segue che la retta di equazione  $x=0$  è un asintoto verticale bilaterale. Dai limiti (1) e (4) segue che non ci sono asintoti orizzontali. Cerchiamo quindi eventuali asintoti obliqui. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)^3}{x^3} = m_1 = 8;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^3}{x^3} = m_2 = 8.$$

Si ha poi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)^3 - 8x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2 + 6x - 1}{x^2} = -12 = q_1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m_2 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x^2 + 6x - 1}{x^2} = -12 = q_2$$

Quindi  $f(x)$  ammette come asintoto obliquo la retta di equazione  $y = 8x - 12$  per  $x$  sia tendente a  $+\infty$  che a  $-\infty$ .

- c) *Calcolare la derivata prima, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo di  $f$ .*

Si ha:

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x-1)^2 \cdot 2 \cdot x^2 - (2x-1)^3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x \cdot (2x-1)^2 \cdot (3x - 2x + 1)}{x^4} = \frac{2(2x-1)^2 \cdot (x+1)}{x^3}$$

Per studiare il segno di  $f'$ , si osservi che  $2(2x-1)^2 \geq 0$  per ogni  $x \in D$  e quindi quel fattore non influisce sul segno. Inoltre  $2(2x-1)^2 = 0$  per  $x = \frac{1}{2}$ . Si ha quindi che il numeratore è positivo quando  $x > -1$ , negativo per  $x < -1$  e si annulla per  $x = -1$  e per  $x = \frac{1}{2}$ ; il denominatore è invece positivo per  $x > 0$  e negativo per  $x < 0$ . Quindi, mettendo insieme i



**1 Tema d'esame**

segni di numeratore e denominatore, si ha  $f'(x) > 0$  per  $x \in (-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , mentre  $f'(x) < 0$  per  $x \in (-1, 0)$  e infine  $f'(x) = 0$  per  $x = -1$  e per  $x = \frac{1}{2}$ . In base allo studio del segno della derivata prima, possiamo concludere che la funzione  $f$  è:

- Crescente nell'intervallo  $(-\infty, -1)$ ;
- Decrescente nell'intervallo  $(-1, 0)$ ;
- Crescente nell'intervallo  $(0, +\infty)$ .

Il punto  $x = -1$  è quindi un punto di massimo (in corrispondenza del quale la funzione assume il valore  $f(-1) = -27$  e si tratta ovviamente di un estremo relativo, poiché la funzione assume sicuramente valori maggiori di  $-27$  (basta ricordare che la funzione tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ ). Non esistono inoltre punti di massimo (si ricordi che il punto  $x = 0$  non appartiene al dominio della funzione). Il punto selezionato  $x = \frac{1}{2}$  non è punto di massimo né di minimo, ma solo un punto di flesso orizzontale (basta osservare che la funzione è crescente sia a sinistra che a destra del punto  $x = \frac{1}{2}$ ).

d) *Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto di ascissa  $x = \frac{1}{2}$ .*

Basterebbe osservare che, come già detto al punto precedente, in  $x = \frac{1}{2}$  c'è un flesso orizzontale per concludere che la retta tangente è una retta orizzontale. Poiché in  $x = \frac{1}{2}$  la funzione vale zero (come già visto determinando gli zeri della funzione), l'equazione della retta tangente è quindi  $y = 0$ . Altrimenti si può procedere come segue: l'equazione della retta tangente in un punto di ascissa  $x_0$  è  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , quindi nel nostro caso si ha:

$$y = 0 + 0 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

e dunque  $y = 0$ .

e) *Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .*

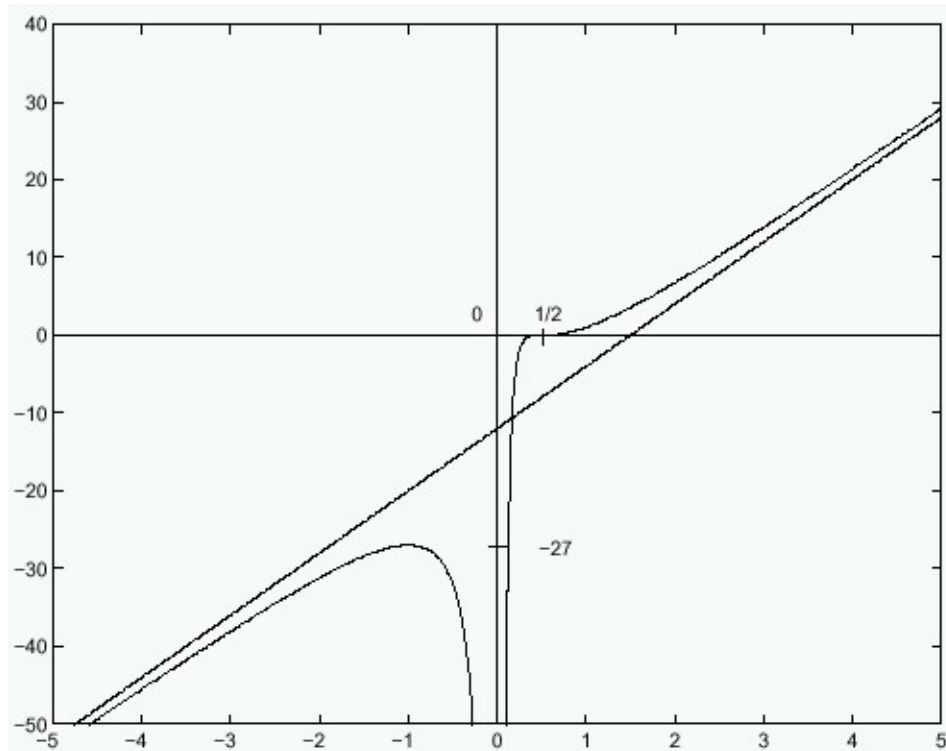
Vedere figura.

f) *Calcolare l'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^3}{x^2} dx$$



**1 Tema d'esame**



Cominciamo con il calcolare l'integrale indefinito di  $f$ .

$$\int \frac{(2x-1)^3}{x^2} dx = \int \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{x^2} dx = \int \left( 8x - 12 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 4x^2 - 12x + 6\ln|x| + \frac{1}{x} + c$$

Per calcolare l'integrale, occorre calcolare (se esiste) il limite  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) dx$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ 4x^2 - 12x + 6\ln|x| + \frac{1}{x} \right]_a^1 = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( 4 \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 6\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 - \left( 4a^2 - 12a + 6\ln|a| + \frac{1}{a} \right) \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( 1 - 6 - 6\ln 2 + 2 - 4a^2 + 12a - 6\ln|a| - \frac{1}{a} \right) = -3 - 6\ln 2 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( 6\ln|a| + \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

Quest'ultimo limite si presenta come una forma indeterminata del tipo  $-\infty + \infty$ , ma si può calcolare agevolmente nel seguente modo:



**1 Tema d'esame**

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left( 6 \ln a + \frac{1}{a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} (6a \ln a + 1) = +\infty$$

dove si è usato il limite notevole  $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \ln a = 0$ . Si ha dunque:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) dx = -\infty$$

e quindi l'integrale diverge.

**Esercizio 3**

a) Se  $a_n \leq \frac{1}{3n^2}$ , la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge: VERO FALSO perché

VERO. La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n^2}$  converge, e usando il criterio del confronto si può quindi concludere che converge anche la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

b) Si ha  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n} = \frac{7}{6}$  VERO FALSO perché

FALSO. Si tratta di una serie geometrica di ragione  $q = \frac{1}{7}$ . Si noti però che la serie assegnata parte dal termine  $n=1$ , e non dal termine  $n=0$ . Ricordiamo che la somma della serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$  è  $\frac{1}{1-q}$ , la somma della serie assegnata è

$$S = \frac{1}{1-q} - q^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

c) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$  converge semplicemente: VERO FALSO perché

VERO. Si tratta di una serie a segni alterni, in quanto  $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > 0$  per ogni  $n$ . La successione  $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  è infinitesima e decrescente, quindi applicando il criterio di Leibniz si conclude che la serie è convergente semplicemente.

**Esercizio 4**

Data la funzione:



**1 Tema d'esame**

$$f(x) = \tan(3x) - 3x\sqrt{1+2x} + 3x^2$$

a) *Trovare il polinomio di MacLaurin di grado 3 di  $f(x)$*

Cominciamo con il calcolare i polinomi di MacLaurin di ordine 3 di  $\tan(3x)$  e di ordine 2 di  $\sqrt{1+2x}$  (per quest'ultimo termine è sufficiente arrestarsi all'ordine 2 perché poi andrà moltiplicato ancora per  $x$ ):

$$\begin{aligned}\tan(3x) &= (3x) + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x + 9x^3 + o(x^3); \\ \sqrt{1+2x} &= 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + o(x^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned}\tan(3x) - 3x\sqrt{1+2x} + 3x^2 &= 3x + 9x^3 - 3x\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2\right) + 3x^2 + o(x^3) = \\ &= 3x + 9x^3 - 3x - 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 + o(x^3) = \frac{21}{2}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

b) *Sfruttando il risultato precedente, calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^3}$ .*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{21}{2}x^3 + o(x^3)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{21}{2}x^3}{2x^3} = \frac{21}{4}.$$