# SERIE NUMERICHE

1

## Serie e successione delle ridotte

- Data la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ si dice

Successione delle ridotte (o delle somme parziali) la successione $(S_n)$, con

$$S_n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$$

Cioè:

$S_0=a_0$
$S_1=a_0+a_1$
$S_2=a_0+a_1+a_2$
$\vdots$
$S_n=a_0+a_1+a_2+\ldots.+a_n$

2

# Convergenza di una Serie Numerica

- Si consideri il limite - se esiste - della successione delle ridotte $(S_n)$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

- Se $S$ è finito, si dice che la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge** a $S$. $S$ si dice **Somma della serie**
- Se $S$ è infinito, si dice che la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **diverge**.
- Se non esiste il limite, si dice che la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ è **indeterminata**.

3

# Esempi

- $\sum_{n\geq 0}(1/2)^n$ converge a $S=2$

perché la successione delle ridotte è
$S_n=1+1/2+1/4+\ldots+1/2^n = (1-1/2^{n+1})/(1-1/2)$
$\lim_{n\to\infty} S_n = 1/(1-1/2)=2$

- $\sum_{n\geq 0} n$ diverge

perché la successione delle ridotte è
$S_n=1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$
$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

- $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ è indeterminata

perché la successione delle ridotte è
$S_n=1+(-1)+1+\ldots+(-1)^n = \{1 \text{ se } n \text{ è pari} \vee 0 \text{ se } n \text{ è dispari}\}$
Non esiste $\lim_{n\to\infty} S_n$

4

## Condizione necessaria per la convergenza

- Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge,

allora necessariamente $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

- (Equivalentemente) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

allora necessariamente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non può convergere

5

## Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza
## Esercizi

Utilizzando la condizione necessaria per la convergenza dire se le seguenti serie possono convergere oppure no:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+\frac{1}{n})}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$

6

## Serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$$

- Converge se $-1 < q < 1$

  e la somma vale $S = \dfrac{1}{1-q}$

- Diverge se $q \geq 1$
- E' indeterminata se $q \leq -1$

7

## Serie geometrica - Esercizi

Utilizzando la serie geometrica, discutere il comportamento delle serie seguenti e calcolarne la somma. Determinare inoltre per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la somma delle serie b) e c) risulta $\frac{1}{3}$.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\log \alpha)^n$, $\alpha \in ]0, \infty[$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$

8

# Serie armoniche

- Serie armonica (divergente)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

- Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- Convergono se $\alpha > 1$
- Divergono se $\alpha \leq 1$



# Criteri di convergenza

- Se i termini sono di segno costante:

- criterio del rapporto
- criterio della radice
- **criterio del confronto**
- **criterio del confronto asintotico**

- Se i termini cambiano segno :

- **criterio di assoluta convergenza**

- Se i termini sono di segno alterno :

- **criterio di Leibniz**

## Criterio del rapporto

Sia $0 \leq a_n$ (almeno 'definitivamente').

Supponiamo che esista il limite del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = L$$

- Se **L<1**, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge**
- Se **L>1**, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ **diverge**

Nulla si può dire se L=1

11

## Criterio della radice

Sia $0 \leq a_n$ (almeno 'definitivamente').

Supponiamo che esista il limite della radice n-esima di $a_n$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L$$

- Se **L<1**, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge**
- Se **L>1**, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ **diverge**

Nulla si può dire se L=1

12

## Criterio del confronto

Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ (almeno 'definitivamente').

- Se la serie numerica $\sum_{n\geq 0} b_n$ **converge** a ***S***
  allora anche la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge** a ***S'***, e ***S '*** $\leq$ ***S***
- Se la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **diverge**
  allora anche la serie numerica $\sum_{n\geq 0} b_n$ **diverge**

13

## Criterio del confronto asintotico

Siano $0 \leq a_n$ e $0 \leq b_n$ (almeno 'definitivamente').
Se $a_n \sim b_n$ (per n che tende a infinito)
allora le due serie numeriche $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ hanno lo stesso carattere, cioè

- la serie numerica $\sum_{n\geq 0} b_n$ **converge** se e solo se la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge**
- la serie numerica $\sum_{n\geq 0} b_n$ **diverge** se e solo se la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **diverge**

14

## Serie a termini di segno costante
### Esercizi

Utilizzando i criteri del rapporto, della radice, del confronto e del confronto asintotico, dire se le segu
serie (a termini positivi) convergono:

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ $\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ $\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\qquad f)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ $\qquad h)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n+\cos n|}{n}$ $\qquad l)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

$m)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ $\qquad n)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$

$o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$ $\qquad p)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

## Criterio di assoluta convergenza

Sia $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie a termini di segno qualunque.

- Se la serie numerica $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ **converge** a ***S*** allora anche la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge** a ***S'***, e $|S'| \leq S$

Si dice anche : Se la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge assolutamente** allora converge anche semplicemente

16

# Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ una serie a termini di segno alterno (dove cioè, per ogni n, sia $a_n>0$).

- Se la successione a termini positivi $(a_n)$ converge a 0 e i suoi termini sono decrescenti (almeno definitivamente), allora la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge**

(cioè se:
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $a_{n+1} \leq a_n$

allora la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge)



# Serie a termini di segno alterno Esercizi

Utilizzando il criterio di Leibniz, discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2+2}{n^2+1}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

# Esercizio (da tema d'esame)

*a*) Enunciare una condizione necessaria per la convergenza delle serie .

*b*) Enunciare il criterio della convergenza assoluta delle serie.

*c*) Di una serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si sa che converge e che la somma vale $\frac{8}{3}$. Allora:

A non si può affermare nulla sul comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

B $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{8}{3}$

C non è detto che la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$ converga a $\frac{8}{3}$

D non c'è nessun $a_n$ maggiore di $\frac{8}{3}$

19