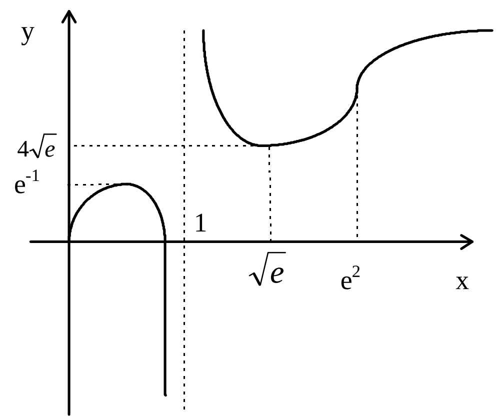
CORREZIONE

Esercizio 1

Sono 9^5 : sono le $D'_{9,5}$ disposizioni con ripetizione di 9 elementi presi a 5 a 5; 5 simboli su 9 possono essere scelti (e ripetuti) e conta l'ordine.

Esercizio 2

Dom f: $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 1$ asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ nessun asintoto orizzontale

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2 \\ \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - 2x\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ nessun asintoto obliquo

$f(x) = x\dfrac{2\ln x + 1}{\ln x}$ $\qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0$ (ma è fuori dal dominio), oppure $2\log x + 1 = 0$, cioè $x = e^{-\frac{1}{n}}$.

Segno di f(x) :

0		$e^{-1/2}$		1	
	+		-		+

cioè:

$f(x) > 0 \quad$ per $\quad 0 < x < e^{-\frac{1}{2}} \quad$ o per $\quad x > 1$

$f(x) < 0 \quad$ per $\quad e^{-\frac{1}{2}} < x < 1$

•

$$f'(x) = \frac{2(\ln x)^2 + \ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{2(\ln x + 1)\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)}{(\ln x)^2}$$

(E' sufficiente porre ln$x$=t e osservare che $2t^2 + t - 1$ si decompone in $2(\mathrm{t}+1)\left(\mathrm{t} - \frac{1}{2}\right)$)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \;,\; x = e^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} \;,\; x = e^{\frac{1}{2}} \text{ punti di estremo relativo}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, e^{-1}\right[\text{ e per } x \in \left]e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[\quad \text{(f monotona crescente)}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]e^{-1}, 1\right[\text{ e per } x \in \left]1, e^{\frac{1}{2}}\right[\quad \text{(f monotona decrescente)}$$

Dunque:

$$x = \frac{1}{e} : \text{ max.relativo , con } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

$$x = \sqrt{e} : \text{ min.relativo ,con } f\left(\sqrt{e}\right) = 4\sqrt{e}$$

•

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \qquad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2$$

Segno di f'':

0	1	e^2
-	+	-
$\cap$	$\cup$	$\cap$

•

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2t^2 + t - 1}{t^2} = 2 : \text{ la tangente in 0 ha coeff. ang. 2}$$

Esercizio 3

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,dx - \int xe^x\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(-x^2+3\right)^3} - e^x(-1+x) + c$$

Infatti:

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)\left(-x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{\left(-x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(-x^2+3\right)^3} + c_1$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c_2 = e^x(-1+x) + c_2$$

Esercizio 4

Si ponga $t = 3x^2$. Poichè, per $t \to 0$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$, si ha per $x \to 0$:

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{2}3x^2 + o(3x^2) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}-1\right)^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{3}{2}x^2 - 1 + o(x^2)\right)^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{9}{4}$$

Esercizio 4’

a) Serie geometrica di ragione $q = 1 + \cos\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\Rightarrow$ la serie converge al numero $S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2}$

b) Se $\frac{}{2} < \quad < \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \le 1 + \cos \quad < 1 \Rightarrow 0 \le q < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Se $0 \le \quad \le \frac{}{2}$ o se $\frac{3}{2} \le \quad \le 2 \quad \Rightarrow 1 \le 1 + \cos \quad \le 2 \Rightarrow 1 \le q \le 2 \Rightarrow$ la serie diverge