INTEGRALI IMPROPRI

Definizione di integrale improprio

- Integrali impropri di prima specie

intervallo di integrazione illimitato I=[a,+∞), f(x) continua su I

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

- Integrali impropri di seconda specie

intervallo di integrazione limitato I=[a,b), f(x) continua su I e illimitata in b

$$\int_a^{b} f(x)\,dx := \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Calcolo di integrali impropri usando la definizione - Esercizi

Calcolare l'integrale improprio di prima specie

$$\int_1^{+\infty} \frac{8x^2}{\sqrt{(2x^3+1)^7}}\,dx$$

Calcolare l'integrale improprio di seconda specie

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$$

Esercizio da tema d'esame

ESERCIZIO 1

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{3}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}\arctan x.$$

a) Trovare l'area della parte di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle x, con $x \in [1, \sqrt{3}]$.

b) Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

4

Criteri di convergenza

- Se la funzione integranda ha segno costante sull'intervallo di integrazione (o almeno in un intorno dell'estremo escluso):

- criterio del confronto
- criterio del confronto asintotico

- Se la funzione integranda cambia segno:

- criterio di assoluta convergenza

5

Criterio del confronto

Siano 0 ≤ f(x) ≤ g(x).

- Se converge l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$
  allora converge anche l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$
- Se diverge l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$
  allora diverge anche l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$

Analogamente per gli integrali impropri di seconda specie.

6

Integrali impropri di funzioni campione

- Per integrali impropri di prima specie
  - convergono se $\alpha>1$
  - divergono se $\alpha\leq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

- Per integrali impropri di seconda specie
  - convergono se $\alpha<1$
  - divergono se $\alpha\geq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Criterio del confronto - Esercizi

Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

A) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

B) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x}\,\mathrm{d}x$

C) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Criterio del confronto asintotico

- Se $f(x) \sim g(x)\ ,\ x \to +\infty$

allora i due integrali impropri $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

hanno lo stesso comportamento
(o entrambi convergono, o entrambi divergono)

- Lo stesso per integrali impropri di seconda specie

se $f(x) \sim g(x)\ ,\ x \to b^-$

9

Criterio del confronto asintotico
Esercizi

Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$a)$ $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-2}}\,dx$$

$b)$ $$\int_0^3 \frac{1-\cos x}{x^2 \sin\sqrt{x}}\,dx$$

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2 \log(1+\sqrt[3]{x})}\ ,$$

Studiarne il comportamento nell'origine e determinare un monomio ad essa equivalente nell'origine.
Studiare quindi la convergenza dell' integrale improprio :

$$\int_0^1 f(x)\ \ dx\ .$$

Criterio di assoluta convergenza

- Se converge l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

allora converge anche l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

- Lo stesso vale per integrali impropri di seconda specie

11

Criterio di assoluta convergenza
Esercizi

Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale improprio :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 - x - 1}\, dx$$

12

Sviluppi di Taylor - MacLaurin

Utilizzo

- nell'analisi locale di un grafico
- nel riconoscimento dei punti critici
- nel calcolo dei limiti
- nella discussione sulla convergenza degli integrali impropri (uso del criterio del confronto asintotico)

13

Esercizio

Data la funzione

$f(x)= 2\arctan(5x)-5\sin 2x -3\ln(1+2x^2)$

- 1. Trovarne lo sviluppo in serie di Mac Laurin di ordine 3
- 2. Riconoscere che il punto $x=0$ è un punto di stazionarietà e precisarne la natura
- 3. Discutere, al variare di k in **R**, il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)+kx^2)/(x^2\sqrt{(\tan x)})$$

- 4. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 (f(x)+8x^2)/(x^2\sqrt{(\tan x)})\, dx$$

14

1. Sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari coinvolte

$\arctan t = t - t^3/3 + t^5/5 + \ldots + (-1)^n\, t^{2n+1}/(2n+1) + o(t^{2n+1})$

$\sin t = t - t^3/3! + t^5/5! + \ldots + (-1)^n\, t^{2n+1}/(2n+1)! + o(t^{2n+1})$

$\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 + \ldots + (-1)^{n-1}\, t^n/n + o(t^n)$

$f(x)=2[5x-(5x)^3/3+o(x^3)]-5[2x-(2x)^3/3!+o(x^3)]-3[2x^2+ \ +o(x^3)]$

$$f(x) = -6x^2 - 230/3\, x^3 + o(x^3)$$

2. Per $x \to 0$ $\quad f(x) \sim -6x^2$

in $x=0$ $f(x)$ ha un punto di massimo locale

15

3. Utilizzo dello sviluppo di Mac Laurin per il calcolo del limite

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+kx^2}{x^2\sqrt{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-6x^2 - \frac{230}{3}x^3 + o(x^3) + kx^2}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(k-6)x^2 - \frac{230}{3}x^3}{x^2\sqrt{x}}$$

- $k > 6 \implies \lambda = +\infty$
- $k < 6 \implies \lambda = -\infty$
- $k = 6 \implies \lambda = 0$

Si sono utilizzati anche il principio di eliminazione dei termini trascurabili (nelle somme) e il principio di sostituzione con funzioni equivalenti (nei prodotti)

16

4. Utilizzo dello sviluppo di Mac Laurin per la discussione sulla convergenza dell'integrale improprio

Si tratta di un integrale improprio di seconda specie di una funzione continua e positiva in un intorno destro di $x=0$. Utilizziamo il il criterio del confronto asintotico.

Dalla discussione precedente, si ha che la funzione

$$g(x)=(f(x)+8x^2)/(x^2\sqrt{(\tan x)})$$

è equivalente, per x che tende a 0^+, alla funzione

$$h(x)=2x^2/(x^2\sqrt{x})=2/(\sqrt{x})$$

Poiché converge l'integrale improprio (tra 0 e 1) della funzione campione $1/(\sqrt{x})$, convergerà anche l'integrale improprio (tra 0 ed 1) della funzione $g(x)$.

Esercizio da tema d'esame

Esercizio 4

Data la funzione

$$f(x) = (e^{2x}-1)^2 - \log(1+4x^2)$$

(a) Calcolare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin di $f(x)$

(b) Dire che tipo di punto è per $f(x)$ il punto $x=0$

(c) Senza fare ulteriori calcoli, dire quanto vale $f'''(0)$

(d) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $O=(0,0)$

(e) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x}$

(f) Senza fare ulteriori calcoli, ma sfruttando i risultati del punto (a), dire se converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3\sqrt{x}}\,dx$$

Esercizio da tema d'esame

E' data la funzione

$$f(x) = \cos^2(kx) + \sqrt{1+2x^2} - 2$$

a) Trovare lo sviluppo del 4^o ordine di MacLaurin di $f(x)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

b) Trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $f(x)$ ha un punto di minimo relativo in $x_0 = 0$.

c) Trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\ln(1+5x^4)}$.

SI PONGA ORA $k = 1$

(d) Trovare il minimo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui $f^{(n)}(0) \neq 0$; per il valore di n trovato, dire quanto vale $f^{(n)}(0)$.

(e) Stabilire il segno di $f(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

(f) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha \sqrt{\arcsin x}}\,dx$$

19