

(Analisi) Matematica I - 9 luglio 2005

A

Esercizio 1

Data la funzione

$$g(x) = \frac{\arctan^2 x + 6x^2}{x^2 + 1}$$

a) calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $g(x)$ e l'asse delle x , per $x \in [0, 1]$.

♣ b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} (g(x) - 6) dx .$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{(x-3)^2}$$

- (a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;
- (b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$; trovare gli eventuali punti di estremo e classificarli;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$, tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti;

(d) determinare l'insieme immagine di f e dire se f è suriettiva;

(e) trovare il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine di $f(x)$.

Esercizio 3

(a) Enunciare il teorema di Lagrange.

(b) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b_1) disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$;

b_2) verificare se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Lagrange per $f(x)$, nell'intervallo $[-1, 2]$;

b_3) trovare gli eventuali punti di Lagrange di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$

N.B.: si dice punto di Lagrange di $g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

◇ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Ad un tavolo da poker viene usato un mazzo di 32 carte contenente 4 assi, 4 re, 4 donne, 4 fanti, 4 dieci, 4 nove, 4 otto, 4 sette.

Un giocatore si domanda quante siano le possibili "mani" di 5 carte che gli possono capitare, ovvero le cinquine di carte, scelte a caso, senza ordine, tra le 32 carte del mazzo.

Rispondere alle seguenti domande, **dando opportune spiegazioni per ogni risposta**:

a) quante sono tutte le possibili "mani"?

b) quante sono le "mani" che contengono 4 assi?

c) quante "mani" contengono solo carte di fiori?

d) quante sono le "mani a colore", cioè contenenti 5 carte dello stesso seme?

♣ **Esercizio 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Enunciare il criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi.

(B) E' data una serie a termini strettamente positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, di cui si sa che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 3$. Allora:

$B_1)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ VERO FALSO perché:

$B_2)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ VERO FALSO perché:

$B_3)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{a_n} = \sqrt[5]{3}$ VERO FALSO perché:

$B_4)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ VERO FALSO perché: