Cognome Nome .... Matricola .... Laurea in ....

(Analisi) Matematica I - 28 gennaio 2006 B

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+7x+10} + 2\arctan\frac{1}{3x}$$

a) calcolare $\int f(x)\,dx$

♣ b) (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+7x+10}\,dx\,.$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x} - 5x + 1.$$

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali e obliqui);

(b) determinare la derivata della funzione $f(x)$, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo di f;

(c) determinare la derivata seconda della funzione $f(x)$, gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali punti di flesso di f;

(d) tracciare il grafico di $f(x)$.

(e) ♣ (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Dire se $f(x)$ è iniettiva e/o suriettiva.

(f) Ricorrendo ad opportune proprietà teoriche, provare che $f(x)$ ha uno e un solo zero.

(g) Scrivere il rapporto incrementale di f relativo al punto $x_0 = 0$. Ricavare $f'(0)$ come limite di tale rapporto incrementale.

Esercizio 3

Data la funzione $f(x) = 8\ln(5\cos x)$

(a) lo sviluppo di Mac Laurin di f di grado 2 è $f(x) = 8\ln 5 - 40x^2 + o(x^2)$

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(b) $f(x)$ ha un punto di flesso in $x = 0$

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(c) la parabola osculatrice al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$ ha equazione $y = 8\ln 5 - 4x^2$

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(d) $f^{(31)}(0) = 1$

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(e) esiste lo sviluppo in serie di Taylor di ordine 5 di $f(x)$ centrato nel punto $x_0 = 4\pi$

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

◇ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

In una cittadina 24 persone (12 uomini e 12 donne, tra cui la Signora Verdi e il Signor Neri) decidono di fondare un comitato che deve essere composto da 16 persone (scelte tra loro).

Indicare **motivando opportunamente le risposte** quanti diversi comitati possono formare se:

- a) non ci sono restrizioni

- b) ci devono essere tanti uomini quante donne

- c) ci devono essere più donne che uomini

- d) la Signora Verdi deve necessariamente farne parte, e anche il Signor Neri; inoltre la Signora Verdi vuole accanto a sé come collaboratrici almeno 9 donne.

♣ **Esercizio 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(A) Enunciare i criteri noti per la convergenza delle serie a temini di segno alterno.

(B) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{4n^2}$

(a) coincide con la serie $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(b) converge semplicemente $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(c) non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza di una serie

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$:

(d) converge assolutamente $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ $\boxed{\text{perché}}$: