

(Analisi) Matematica I - 28 gennaio 2006

A

**Esercizio 1**

Data la funzione

$$f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + 4x + 3} + \arctan \frac{1}{2x}$$

a) calcolare  $\int f(x) dx$

♣ b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x + 5}{x^2 + 4x + 3} dx .$$

## Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - e^{-x} + 3x.$$

- (a) determinare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali e obliqui);
- (b) determinare la derivata della funzione  $f(x)$ , gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo di  $f$ ;
- (c) determinare la derivata seconda della funzione  $f(x)$ , gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali punti di flesso di  $f$ ;

(d) tracciare il grafico di  $f(x)$ .

(e) ♣ (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se  $f(x)$  è iniettiva e/o suriettiva.

(f) Ricorrendo ad opportune proprietà teoriche, provare che  $f(x)$  ha uno e un solo zero.

(g) Scrivere il rapporto incrementale di  $f$  relativo al punto  $x_0 = 0$ . Ricavare  $f'(0)$  come limite di tale rapporto incrementale.

### Esercizio 3

Data la funzione  $f(x) = 2 \ln(3 \cos x)$

(a) lo sviluppo di Mac Laurin di  $f$  di grado 2 è  $f(x) = 2 \ln 3 - 6x^2 + o(x^2)$

VERO  FALSO  perché:

(b)  $f(x)$  ha un punto di flesso in  $x = 0$

VERO  FALSO  perché:

(c) la parabola osculatrice al grafico di  $f(x)$  nel punto di ascissa  $x = 0$  ha equazione  $y = 2 \ln 3 - x^2$

VERO  FALSO  perché:

(d)  $f^{(29)}(0) = 0$

VERO  FALSO  perché:

(e) esiste lo sviluppo in serie di Taylor di ordine 5 di  $f(x)$  centrato nel punto  $x_0 = 2\pi$

VERO  FALSO  perché:

◇ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

In una cittadina 20 persone (10 uomini e 10 donne, tra cui la Signora Rossi e il Signor Bianchi) decidono di fondare un comitato che deve essere composto da 12 persone (scelte tra loro).

Indicare **motivando opportunamente le risposte** quanti diversi comitati possono formare se:

- a) non ci sono restrizioni

- b) ci devono essere tanti uomini quante donne

- c) ci devono essere più donne che uomini

- d) la Signora Rossi deve necessariamente farne parte, mentre il Signor Bianchi potrebbe anche non essere nominato; inoltre la Signora Rossi vuole accanto a sé come collaboratrici almeno 7 donne.

♣ **Esercizio 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Enunciare i criteri noti per la convergenza delle serie a termini di segno alterno.

(B) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n^2}$

(a) coincide con la serie  $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

VERO     FALSO     perché:

(b) converge semplicemente     VERO     FALSO     perché:

(c) non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza di una serie

VERO     FALSO     perché:

(d) converge assolutamente     VERO     FALSO     perché: