Cognome Nome .... Matricola .... Laurea in ....

(Analisi) Matematica I - 27 gennaio 2007 A

Esercizio 1

E' data la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-4x^3} + \frac{1-x}{x(x^2+1)}\, dx$$

(a) Calcolare l' integrale indefinito $\int f(x)dx$.

(b) ♣ (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$.

ESERCIZIO 2.
Data la funzione

$$f(x) = \ln(x-2) + \frac{5}{x-2}$$

(a) determinare il dominio di $f(x)$; trovare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti

(b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$; trovare gli eventuali punti di estremo e classificarli

(c) tracciare un grafico qualitativo di f, tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti

(d) **SENZA FARE CALCOLI ALGEBRICI**, ma sfruttando le informazioni precedenti, provare che $f(x)$ non ha zeri.

(e) Trovare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 centrato nel punto $x_0 = 3$ della funzione $f(x) = \ln(x-2) + \dfrac{5}{x-2}$.

(f) ♣ (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Si consideri la funzione $h(x) = f''(x)$. SENZA CALCOLARLO, ma servendosi di opportuni criteri, dire se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} h(x)\,dx$.

ESERCIZIO 3. Sia data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno a D.

a) Dire che cosa significa che $f(x)$ è continua in x_0 e che cosa significa che $f(x)$ è derivabile in x_0.

b) Enunciare la proprietà che mette in relazione i due concetti di continuità e di derivabilità di $f(x)$ in x_0.

c) E' data la funzione $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{2} & \text{se } x < -1 \\ |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

c_1) Tracciare un grafico di $g(x)$.

c_2) Trovare gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $g(x)$, giustificando le affermazioni con le proprietà e con i calcoli opportuni.

$\diamondsuit$ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Si consideri l'insieme di cifre A=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Dire, motivando la risposta, quanti numeri di 3 cifre si possono formare con le cifre di A.

b) Dire, motivando la risposta, quanti numeri di 3 cifre tutte distinte si possono formare con le cifre di A.

c) Dire, motivando la risposta, quanti numeri di 3 cifre tutte distinte e minori di 500 si possono formare con le cifre di A.

♣ **Esercizio 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(A) Dire che cosa è una serie geometrica; discuterne la convergenza e la convergenza assoluta.

(B) Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3k+1}{3k-1} \right)^n, \quad k \in \mathbb{R}$$

(1) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge

(2) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge assolutamente

(3) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma della serie $\displaystyle\sum_{n \to 0}^{+\infty} \left(\frac{3k+1}{3k-1} \right)^n$ vale $\dfrac{1}{4}$