

ESERCIZIO 1

E' data la funzione $f(x) = (4 - 3x^2) \sin 3x - 2x^2 e^{\sqrt{2}x} - 12x + 2x^2$.

(a) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 di $f(x)$.

(b) Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x \sin^2 x}$.

(c) Provare che il punto $x = 0$ è un punto di stazionarietà per $f(x)$ e indicarne la natura (punto di massimo, minimo o flesso).

♣ (d) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{3x\sqrt{x} \sin^2 x} dx$.

(d) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

(e) Dire se $f(x)$ è invertibile.

(f) Provare che $f(x)$ ha un punto x_m di minimo assoluto e trovare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in tale punto x_m .

(g) Enunciare il teorema di Fermat e dire se si può applicare tale teorema alla funzione $f(x)$ relativamente al punto x_m .

ESERCIZIO 3.

(A) Definire che cosa è una primitiva di una funzione $f(x)$ su un intervallo I ; enunciare il Teorema che caratterizza l'insieme delle primitive di una data funzione su un intervallo I .

(B) E' data la funzione

$$g(x) = \frac{7}{x^3} \ln(4 + x).$$

(B₁) Trovare le primitive di $g(x)$.

♣ (B₂) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} g(x) dx$.

◇ **ESERCIZIO 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Un gruppo di 30 studenti (tra cui il Signor Rossi e il Signor Bianchi) deve sostenere un esame scritto in un'aula che contiene 6 file con 5 banchi in ogni fila.

In quanti diversi modi si può accomodare il signor Bianchi nelle seguenti situazioni:

(a) se non si pone nessuna restrizione;

(b) se vuole essere in prima fila;

(c) se vuole essere in ultima fila;

(d) se non vuole stare in prima fila;

(e) se vuole essere seduto accanto al Signor Bianchi.

♣ **ESERCIZIO 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Definire che cosa è una serie a termini di segno variabile; enunciare i criteri di convergenza noti per tali serie (in particolare, i criteri di assoluta convergenza e il criterio di Leibniz).

(B) Utilizzando tali criteri, discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$(B_1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin 5n}{n^4}.$$

$$(B_2) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5n}{3n^2 + 7}.$$

$$(B_3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5n}{3n + 7}.$$