

ESERCIZIO 1

(A) Sia data una funzione $f(x)$ e sia x_0 un punto interno al suo dominio; definire il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di grado n di $f(x)$ centrato in x_0 e dire sotto quali ipotesi si può scrivere.

(B) E' data la funzione $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

(B₁) Scrivere il polinomio di Taylor $T_2(x)$ di grado 2, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x)$.

(B₂) Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{3(x - 1)^2}$.

(B₃) Calcolare l'errore che si commette se si assume come valore approssimato di f , nel punto $x_1 = \frac{1}{2}$, il valore del polinomio $T_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

(d) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti

(e) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ negli eventuali punti in cui $f(x)$ interseca l'asse delle x .

(f) Dire se $f(x)$ è derivabile in tutti i punti del suo dominio.

(g) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se esso è applicabile ad $f(x)$ nell'intervallo $[3, 5]$.

ESERCIZIO 3.

(A) Definire che cosa è una primitiva di una funzione $f(x)$ su un intervallo I ; enunciare il Teorema che caratterizza l'insieme delle primitive di una data funzione su un intervallo I .

(B) E' data la funzione $g(x) = -\frac{7}{x^3} \ln(9 + x^2)$.

(B₁) Trovare la primitiva di $g(x)$ che si annulla per $x = 1$.

◇ (B₂) (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse delle x , per $x \in [1, 3]$.

♣ (B₃) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} g(x) dx$.

♣ **ESERCIZIO 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Definire che cosa è una serie geometrica e discuterne la convergenza.

(B) Si consideri la serie numerica, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7 - a^n}{4^n}$$

(B₃) Si trovino i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge

(B₂) Posto $a = 3$, si verifichi che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7 - 3^n}{4^n}$ converge e si dica quale ne è la somma.

(B₃) Sapendo che, $\forall n \geq 10$, $n! > 4^n$, e sfruttando il risultato del punto precedente, si dica se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7 - 3^n}{n!}$.