Cognome Nome .... Matricola .... Laurea in ....

Esame di (Analisi) Matematica I - 24 gennaio 2009 A

ESERCIZIO 1

(A) Sia data una funzione $f(x)$ e sia x_0 un punto interno al suo dominio; definire il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di grado n di $f(x)$ centrato in x_0 e dire sotto quali ipotesi si può scrivere.

(B) E' data la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

(B_1) Scrivere il polinomio di Taylor $T_2(x)$ di grado 2, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x)$.

(B_2) Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare il limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{5(x-1)}$.

(B_3) Calcolare l'errore che si commette se si assume come valore approssimato di f, nel punto $x_1 = \frac{1}{2}$, il valore del polinomio $T_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 + x + 2}}$$

Si chiede di:

(a) determinare il dominio, gli zeri e il segno della funzione $f(x)$

(b) trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti

(c) determinare la derivata prima di $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo (locale e assoluto)

(d) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti

(e) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ negli eventuali punti in cui $f(x)$ interseca l'asse delle x.

(f) Dire se $f(x)$ è derivabile in tutti i punti del suo dominio.

(g) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se esso è applicabile ad $f(x)$ nell'intervallo $[-5, -2]$.

ESERCIZIO 3.

(A) Definire che cosa è una primitiva di una funzione $f(x)$ su un intervallo I; enunciare il Teorema che caratterizza l'insieme delle primitive di una data funzione su un intervallo I.

(B) E' data la funzione $\quad g(x) = -\dfrac{6}{x^3}\ln(4+x^2).$

(B_1) Trovare la primitiva di $g(x)$ che si annulla per $x = 1$.

$\diamondsuit$ (B_2) (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse delle x, per $x \in [1, 2]$.

$\clubsuit$ (B_3) (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx\,.$

$\diamondsuit$ **ESERCIZIO 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

L'alfabeto del pianeta KRRxx è composto dalle sole lettere {K,W,X,M,Y,R} e non distingue tra lettere minuscole e maiuscole; le parole in KRRxx sono stringhe qualsiasi, dove le lettere non possono essere ripetute. Solo il Governatore Massimo di KRRxx può usare parole con lettere ripetute, ma deve pronunciare parole di al più tre lettere.

MOTIVANDO OPPORTUNAMENTE le risposte, dire:

(a) quante sono le parole di quattro lettere che un qualunque cittadino di KRRxx può pronunciare;

(b) quante sono le parole che il Governatore Massimo di KRRxx può pronunciare;

(c) Il Primo Ministro (che non è il Governatore Massimo) vuole fare un discorso usando solo parole della massima lunghezza, senza mai ripetere nessuna parola, e vorrebbe che il suo discorso contenesse più di 1000 parole. Il Gran Ciambellano gli fa osservare che questo è impossibile. Chi ha ragione?

(d) Il Gran Ciambellano (che non è il Governatore Massimo) vuole fare un discorso usando solo parole di quattro lettere che inizino per K e che non terminino mai per R. Quante parole può pronunciare al massimo?

♣ **ESERCIZIO 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(A) Definire che cosa è una serie geometrica e discuterne la convergenza.

(B) Si consideri la serie numerica, dipendente dal parametro $k \in I\!R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n + 5}{3^n}$$

(B_3) Si trovino i valori di $k \in I\!R$ per cui la serie converge

(B_2) Posto $k = 2$, si verifichi che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ converge e si dica quale ne è la somma.

(B_3) Sapendo che, $\forall n \geq 7,\ n! > 3^n$, e sfruttando il risultato del punto precednte, si dica se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 5}{n!}$.