Cognome Nome .... Matricola .... Laurea in ....

Esame di (Analisi) Matematica I - 22 novembre 2008 A

ESERCIZIO 1

E' data la funzione $f(x) = \ln\left(1 + 2x - x^2\right) - 2x\cos x$.

(a) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di $f(x)$.

(b) Utilizzando lo sviluppo trovato, provare che $f(x)$ ha segno costante in un intorno di $x = 0$ (e dire quale).

♢ (c) (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + 3x^2}{x^3\sqrt{\sin x}}$

♣ (d) (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Dire se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x) + 3x^2}{x^3\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x + \ln\left((x+1)^2\right)$$

Si chiede di:

(a) determinare il dominio della funzione $f(x)$

(b) trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti

(c) determinare la derivata prima di $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo (locale e assoluto)

(d) determinare la derivata seconda di $f(x)$, gli intervalli di concavità e convessità di $f(x)$ e gli eventuali punti di flesso

(e) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti

(f) SENZA FARE CALCOLI ALGEBRICI, ma sfruttando tutte le informazioni ottenute in precedenza, provare che, oltre ad $x = 0$, $f(x)$ ha un secondo zero $x = c$ e indicare tra quali due interi consecutivi c è compreso..

ESERCIZIO 3.

A) Enunciare il teorema della media integrale per una funzione $f(x)$ continua su un intervallo I= $[a, b]$.

B) sono date le due funzioni

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 + \sin x)^4}} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{4 - 5x}{x^3 - 4x^2}$$

(B_1) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B_2) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

$\diamondsuit$ (B_3) (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*) Provare che si può applicare il teorema della media integrale a $f(x)$ sull'intervallo I$=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ed esplicitare la tesi del teorema relativamente alla funzione $f(x)$ su I.

$\clubsuit$ (B_4) (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_5^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

$\diamondsuit$ **ESERCIZIO 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

(A) Si definisca che cosa sono le combinazioni e le disposizioni semplici di n elementi presi a k a k, e come si calcolano.

(B) In un mazzo di 52 carte ordinarie, si considerino tutte le possibili "mani" di 5 carte (cioè tutte le cinquine di carte, scelte a caso, senza ordine, tra le 52 carte del mazzo).

Si risponda alle seguenti domande, **dando opportune spiegazioni per ogni risposta**.

(B_1) Quante sono tutte le possibili "mani"?

(B_2) Quante sono le "mani" che contengono 4 Re?

(B_3) Quante sono le "mani contenenti solo carte dello stesso seme?

(B_4) Quante sono le "mani " contenenti contenenti almeno una donna?

♣ **ESERCIZIO 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(A) Definire che cosa è una serie a termini di segno alterno; enunciare il criterio di Leibniz e il criterio di assoluta convergenza.

(B) Sia $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una generica successione a termini positivi convergente a 0. Dire se le seguenti affermazioni sono VERE o FALSE, **dando opportune spiegazioni per ogni risposta** (se sono vere spiegare perché, se sono false portare un controesempio):

(B_1) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente

(B_2) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge se la successione (a_n) è decrescente

(B_3) se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ è convergente

(B_4) se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(B_5) Se $a_n = \dfrac{n+1}{3n+5}$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge.