

ESERCIZIO 1

(A) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di una generica funzione $f(x)$, e dire quali ipotesi si devono fare su $f(x)$ per poterlo scrivere.

(B₁) Servendosi della formula scritta sopra, scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 della funzione $f(x) = \ln(\cos x)$.

(B₂) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $g(x) = \arctan(2x - x^2)$.

(B₃) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $h(x) = 2x + f(x) - g(x)$.

◇ (B₅) (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà) Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{5x \tan^2 x}$

♣ (B₆) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{h(x)}{5x\sqrt{x} \tan^2 x} dx$.

(d) Determinare l'insieme immagine $\text{Im}(f)$. Dedurre da questa informazione il numero degli zeri di f .

(e) Dire che cosa è il rapporto incrementale di una generica funzione $g(x)$ relativo ad un suo punto x_0 . Definire poi la derivata prima di $g(x)$ calcolata in x_0 .

(f) \diamond (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà) Relativamente alla funzione $f(x) = 2 + 9x + e^{-x}$ di questo esercizio, ricavare $f'(0)$ in due modi diversi: come limite di un opportuno rapporto incrementale oppure' calcolando $f'(x)$ in $x = 0$.

ESERCIZIO 3.

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(1 - \sin x)^2}} + \sqrt[4]{x^3} \log x$$

(a) Calcolare l' integrale indefinito $\int f(x)dx$.

♣ (b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$.

◇ **ESERCIZIO 4** (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà)

Cinque amministratori pubblici (i Signori A, B, M, P, S) vengono condotti in carcere alle Vallette, dove hanno a disposizione tre celle singole (indistinguibili tra di loro) e una doppia.

(A) Quante sono le diverse possibilità di occupazione delle celle, se non ci sono restrizioni?

(B) Fonti sicure affermano che A sarà alloggiato in una singola, e che, se B finirà nella doppia, anche P lo seguirà. In questo caso:

(B₁) quante sono le diverse possibilità di occupazione delle celle?

(B₂) quante possibilità ha il Signor B di finire in una qualsiasi delle singole?

(B₃) il Signor M e il Signor S hanno le stesse possibilità di finire in una singola?

(B₄) quale dei cinque signori ha le minori possibilità di finire in una singola?

♣ **ESERCIZIO 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Definire che cosa è una serie geometrica, discuterne la convergenza e il valore della somma.

(B) E' data la serie, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^2 - 3}{2a} \right)^n$$

(B₁) Dire se la serie converge quando $a = -\sqrt{3}$ oppure quando $a = -3$.

(B₂) Provare che non esiste nessun valore di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^2 - 3}{2a} \right)^n$ abbia per somma $S = \frac{1}{2}$.

(B₃) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ converge la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^2 - 3}{2a} \right)^n$$