Correzione dell'esame di (Analisi) Matematica I - 21 marzo 2009 A

ESERCIZIO 1

(A) *Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di una generica funzione $f(x)$, e dire quali ipotesi si devono fare su $f(x)$ per poterlo scrivere.*

Lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di una generica funzione $f(x)$ è:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) \quad (\text{per } x \to 0)$$

Per poter fare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di una generica funzione $f(x)$ è necessario che f sia una funzione derivabile 3 volte in $x = 0$.

(B_1) *Servendosi della formula scritta sopra, scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 della funzione $f(x) = \ln(\cos x)$.*

Facciamo la derivata prima, seconda e terza della funzione $f(x) = \ln(\cos x)$.

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x; \quad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}; \quad f'''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Calcoliamo ora la funzione e le sue prime tre derivate in $x = 0$ ed otteniamo $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = -1$; $f'''(0) = 0$. Dunque lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $f(x)$ risulta essere:

$$f(x) = \ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

(B_2) *Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $g(x) = \sin(x^2 - 3x)$.*

Utilizziamo lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 della funzione $\sin(u)$:

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + o(u^3) \quad (\text{per } u \to 0).$$

Effettuando la sostituzione $u = x^2 - 3x$ possiamo scrivere lo sviluppo di MacLaurin richiesto:

$$\sin(x^2 - 3x) = (x^2 - 3x) - \frac{1}{6}(x^2 - 3x)^3 + o((x^2 - 3x)^3) = -3x + x^2 + \frac{27}{6}x^3 + o(x^3) = -3x + x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3).$$

(B_3) *Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $h(x) = 3x + f(x) + g(x)$.*

Utilizzando gli sviluppi trovati nei due punti precedenti, lo sviluppo di ordine 3 della funzione $h(x)$ risulta essere:

$$\begin{aligned} h(x) &= 3x + \ln(\cos x) + \sin(x^2 - 3x) = \\ &= 3x - \frac{1}{2}x^2 - 3x + x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$ (B_4) *(Solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà) Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare il limite* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{3x\sin^2 x}$.

Nel calcolo del limite per $x \to 0$ possiamo utilizzare al posto di $h(x)$ e di $\sin^2 x$ il loro polinomio di Mac Laurin in quanto il comportamento locale, per $x \to 0$,di una funzione coincide con quello del suo polinomio di Mac Laurin. Dunque:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{3x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{6x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{6x} = +\infty.$$

♣ (B_5) *(Solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{3x\sqrt{x}\sin^2 x}\,dx$.

Utilizzando il criterio del confronto asintotico, possiamo asserire che, poiché il comportamento della funzione $\dfrac{h(x)}{3x\sqrt{x}\sin^2 x}$ in un intorno destro di $x = 0$ coincide con quello della funzione $\dfrac{x^2}{6x\sqrt{x}x^2} = \dfrac{1}{6x\sqrt{x}}$ e poiché diverge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{6x\sqrt{x}}\,dx$, allora diverge anche l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{3x\sqrt{x}\sin^2 x}\,dx$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = 8 + 5x + e^{-x}$$

(a) *Determinare il dominio, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti della funzione $f(x)$.*

Poiché f è somma di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, risulta $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e gli estremi del dominio sono $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(8 + 5x + e^{-x}) = 8 + 5\cdot(+\infty) + 0 = +\infty.$$

Invece

$$\lim_{x\to-\infty}(8 + 5x + e^{-x}) = 8 + 5\cdot(-\infty) + \infty = -\infty + \infty$$

dà luogo ad una forma indeterminata, la quale si può risolvere ad esempio mettendo in evidenza l'esponenziale (che si intuisce essere il termine prevalente):

$$\lim_{x\to-\infty}(8 + 5x + e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(8e^x + 5xe^x + 1) = \left(\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\right)\lim_{x\to-\infty}(8e^x + 5xe^x + 1) = +\infty\cdot 1 = +\infty,$$

dove si è tenuto conto del limite notevole $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$.
Non ci sono dunque asintoti orizzontali (né verticali), mentre potrebbero esserci asintoti obliqui.
Per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x} + 5 + \frac{1}{xe^x}\right) = 0 + 5 + 0 = 5$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 5x) = \lim_{x\to+\infty}(8 + e^{-x}) = 8 + 0 = 8,$$

da cui segue che la retta $y = 5x + 8$ è asintoto obliquo destro per f.
Per $x \to -\infty$, risulta

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{x} + 5 + \frac{1}{xe^x}\right) = 0 + 5 + \frac{1}{0^-} = 5 - \infty = -\infty$$

e quindi f non ha asintoto obliquo sinistro.

(b) *Determinare la derivata prima di $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo (locale e assoluto).*

Poiché somma di funzioni ovunque derivabili in $\mathbb{R}$, f è ovunque derivabile in $\mathbb{R}$ e risulta

$$f'(x) = 5 + e^{-x}(-1) = 5 - e^{-x}.$$

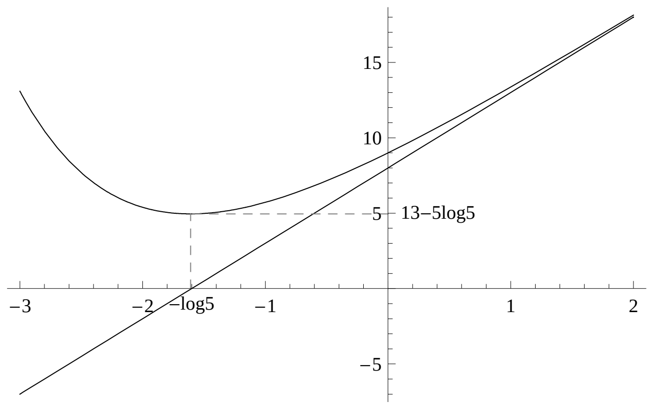
Per determinare intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo di f, studiamo zeri e segno di f'. Si ha

$$\begin{array}{lclclcl} f'(x) = 0 & \iff & e^{-x} = 5 & \iff & -x = \ln 5 & \iff & x = -\ln 5 \\ f'(x) > 0 & \iff & e^{-x} < 5 & \iff & -x < \ln 5 & \iff & x > -\ln 5 \end{array}$$

e, di conseguenza, $f'(x) < 0 \iff x < -\ln 5$.
Quindi f è decrescente sull'intervallo $(-\infty, -\ln 5)$, crescente su $(-\ln 5, +\infty)$ ed il punto critico $x = -\ln 5$ è punto di minimo assoluto (si ricordi che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$) per f; f non ha punti di massimo.

(c) *Tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.*

Calcoliamo le ordinate del punto di minimo:
$f(-\ln 5) = 8 - 5\ln 5 + 5 = 13 - 5\ln 5 > 3$
(si noti che $5 < e^2$ implica $\ln 5 < 2$ e quindi $-5\ln 5 > -10$).
Dunque, dalle informazioni sopra ricavate, possiamo tracciare la figura seguente:



(d) *Determinare l'insieme immagine Im(f). Dedurre da questa informazione il numero degli zeri di f.*

Poiché il minimo assoluto di f vale $f(-\ln 5) = 13 - 5\ln 5$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, risulta $\mathrm{Im}(f) = [13 - 5\ln 5, +\infty)$.
Poiché $13 - 5\ln 5 > 0$, $y = 0$ non è un valore assunto da f, e quindi f non ha zeri.

(e) *Dire che cosa è il rapporto incrementale di una generica funzione $g(x)$ relativo ad un suo punto x_0. Definire poi la derivata prima di $g(x)$ calcolata in x_0.*

Il rapporto incrementale di una funzione $g(x)$ relativo ad un qualsiasi punto x_0 interno al suo dominio è definito come il rapporto tra la variazione della funzione $g(x)$ e la variazione della variabile x nel passaggio da x_0 a x, ossia

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{per ogni } x \neq x_0.$$

La derivata prima di $g(x)$ calcolata in un qualsiasi punto x_0 interno al suo dominio è definita come il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale di $g(x)$ in x_0 per $x \to x_0$, ossia

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{(se esiste finito)}.$$

(f) $\diamondsuit$ (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Relativamente alla funzione $f(x) = 8 + 5x + e^{-x}$ di questo esercizio, ricavare $f'(0)$ in due modi diversi: come limite di un opportuno rapporto incrementale oppure calcolando $f'(x)$ in $x = 0$.

Poiché $f(0) = 8 + e^0 = 9$, si ha

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{8 + 5x + e^{-x} - 9}{x} = 5 + \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = 5 + \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{-y} = 5 - \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 5 - 1 = 4,$$

(si è fatto il cambio di variabile $y = -x$ per ricondursi al limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$).
D'altra parte, poiché $f'(x) = 5 - e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (v. punto (b) precedente), risulta $f'(0) = 5 - e^0 = 4$

ESERCIZIO 3.

E' data la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[4]{(1-\cos x)^3}} + \sqrt[3]{x^2}\log x$

(A) Calcolare l'integrale indefinito di $f(x)$.

Chiamiamo $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{(1-\cos x)^3}}\, \mathrm{d}x$ e $I_2 = \int \sqrt[3]{x^2}\, \ln x\, \mathrm{d}x$.

Possiamo riscrivere la funzione integranda del primo integrale come $h(x) = \sin x(1-\cos x)^{-\frac{3}{4}}$ e pensare all'integrale di funzione composta

$$\int (f(x))^p f'(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}[f(x)]^{(p+1)} \quad (\text{purché } p \neq -1)$$

Nel nostro caso $p = -\dfrac{3}{4}$, $f(x) = 1-\cos x$ e $f'(x) = \sin x$. Quindi $\mathrm{I}_1 = \dfrac{(1-\cos x)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = 4\sqrt[4]{1-\cos x}.$

Calcoliamo il secondo integrale per parti, scegliendo come funzione da integrare $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ e come funzione da derivare $g(x) = \ln x$.

$$\int \sqrt[3]{x^2}\, \ln x\, \mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\, \ln x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{5}{3}}\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\, \ln x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{2}{3}}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\, \ln x - \frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5} + c.$$

L'integrale cercato è quindi

$$I = 4\sqrt[4]{1-\cos x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\, \ln x - \frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5} + c.$$

♣ *(B) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx.$

Per definizione di integrale improprio di seconda specie:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sqrt[4]{(1-\cos x)^3}} + \sqrt[3]{x^2}\ln x\right)\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(4\sqrt[4]{1-\cos\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{9}{25}\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5} - 4\sqrt[4]{1-\cos t} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5}\,\ln t + \frac{9}{25}\sqrt[3]{t^5}\right).
\end{aligned}$$

Facendo il limite si ottiene che l' integrale dato converge a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x = 4 + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{9}{25}\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}$$

poiché, dal limite fondamentale $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\alpha\, \ln t = 0$ $\forall\alpha > 0$, si ha che $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5}\,\ln t = 0.$

$\diamondsuit$ **ESERCIZIO 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Cinque amministratori pubblici (i Signori A, B, M, P, S) vengono condotti in carcere alle Vallette, dove hanno a disposizione tre celle singole (indistinguibili tra loro) e una doppia.

(A) *Quante sono le diverse possibilità di occupazione delle celle, se non ci sono restrizioni?*

In assenza di restrizioni il numero di possibilità di occupazione delle celle coincide con il numero di modi con cui scegliere due amministratori tra i cinque senza considerare l'ordine, cioè il numero di combinazioni semplici di cinque elementi presi due a due:

$$\mathrm{C}_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Una volta scelti i due amminstratori che occuperaranno la doppia tutti gli altri tre amministratori andranno ad occupare le tre celle singole; essendo indistinguibili le tre celle singole non conta l'ordine e quindi c'è un solo modo per questi tre amministratori di occupare le tre celle.

(B) *Fonti sicure affermano che A sarà alloggiato in una singola, e che, se B finirà nella doppia, anche P lo seguirà. In questo caso:*

(B_1) *quante sono le diverse possibilità di occupazione delle celle?*

Per calcolare queste possibilità distinguiamo il caso in cui B e P occupano la cella doppia. Il numero di configurazioni in cui B e P occupano la cella doppia è uno, infatti A occupa una delle celle singole, B e P occupano la cella doppia e infine M e S occupano le due celle singole rimanenti (quest'ultima è una sola configuarzione essendo per ipotesi le celle singole indistinguibili). Oltre a questa configurazione esistono quelle in cui A e B occupano due celle singole e quindi questo numero di possibilità è pari al numero di modi in cui posso formare una coppia non ordinata dalla terna M, P, S per stabilire gli occupanti della doppia. Questi modi sono il numero di combinazioni di tre elementi presi due a due $\mathrm{C}_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$. Quindi il numero di possibilità richiesto è

$$1 + \mathrm{C}_{3,2} = 1 + 3 = 4.$$

(B_2) *quante possibilità ha il Signor B di finire in una qualsiasi delle singole?*

Queste possibilità sono $\mathrm{C}_{3,2}$ per lo stesso ragionamento fatto al punto precedente.

(B_3) *il Signor M e il Signor S hanno le stesse possibilità di finire in una singola?*

La risposta è affermativa, infatti tutti i vincoli posti non riguardano M e S.

(B_4) *quale dei cinque signori ha le minori possibilità di finire in una singola?*

In questo caso osserviamo che A finisce sicuramente in una cella singola, B ha $\mathrm{C}_{3,2}$ possibilità di finire in una singola per quanto già detto al punto (B_1), M ha due possibilità di finire nella cella singola: una quando B e P sono nella doppia e l'altra quando P e S sono nella doppia, S ha ancora due possibilità che corrispondono una a B e P in doppia e l'altra con P e M in doppia. Infine P ha una sola possibilità di finire nella singola: quando A,B e P sono nelle tre celle singole. Quindi P ha il minor numero di possibilità di finire nella singola. Osserviamo che questa risposta è coerente con il fatto che P è quello per cui sono presenti più vincoli.

♣ **ESERCIZIO 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(A) *Definire che cosa è una serie geometrica, discuterne la convergenza e il valore della somma.*

Una serie geometrica di ragione q è una serie numerica della forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Essa converge se e solo se $|q| < 1$, e in tal caso la somma vale $S = \dfrac{1}{1-q}$.
Se $q \le -1$ è indeterminata, mentre se $q \ge 1$ è divergente.

(B) *E' data la serie, dipendente dal parametro* $a \in I\!R \setminus \{0\}$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4a^2-3}{4a}\right)^n$

(B_1) *Dire se la serie converge quando* $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *oppure quando* $a = \frac{1}{2}$.

Se $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la ragione q della serie diviene $q = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Poiché $-1 < -\frac{\sqrt{2}}{4} < 1$, la serie converge.
Se $a = \frac{1}{2}$, la ragione diviene $q = -1$, e dunque la serie non converge (ma è indeterminata).

(B_2) *Provare che non esiste nessun valore di* $a \in I\!R \setminus \{0\}$ *per cui la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4a^2-3}{4a}\right)^n$ *abbia per somma* $S = \frac{1}{2}$.

La somma della serie (per i valori di $a \in I\!R$ per cui converge), vale $S = \dfrac{1}{1 - \frac{4a^2-3}{4a}} = \dfrac{4a}{4a - 4a^2 + 3}$.
Si ha $S = \dfrac{1}{2}$ se e solo se $4a^2 + 4a - 3 = 0$, e dunque se e solo se $a = \dfrac{1}{2}$ oppure se $a = -\dfrac{3}{2}$.

Abbiamo già visto che se $a = \dfrac{1}{2}$ la serie non converge, e dunque tale valore non è accettabile.
Se $a = -\dfrac{3}{2}$, la ragione della serie diviene $q = -1$, e dunque anche in questo caso la serie non converge, e neppure tale valore è accettabile.

(B_3) *Dire per quali valori di* $a \in I\!R \setminus \{0\}$ *converge la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4a^2-3}{4a}\right)^n$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4a^2-3}{4a}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{4a^2-3}{4a}$.
Pertanto converge se e solo se $\left|\dfrac{4a^2-3}{4a}\right| < 1$, cioè se:

$$\begin{cases} \dfrac{4a^2-3}{4a} < 1 \\ \dfrac{4a^2-3}{4a} > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{4a^2-4a-3}{4a} < 0 \\ \dfrac{4a^2+4a-3}{4a} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 0 < a < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < a < 0 \quad \vee \quad a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque la serie converge se e solo se $-\dfrac{3}{2} < a < -\dfrac{1}{2}$ oppure se $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$.