

**ESERCIZIO 1**

(A) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di una generica funzione  $f(x)$ , e dire quali ipotesi si devono fare su  $f(x)$  per poterlo scrivere.

(B<sub>1</sub>) Servendosi della formula scritta sopra, scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 della funzione  $f(x) = \ln(\cos x)$ .

(B<sub>2</sub>) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione  $g(x) = \sin(x^2 - 3x)$ .

(B<sub>3</sub>) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione  $h(x) = 3x + f(x) + g(x)$ .

◇ (B<sub>5</sub>) (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà) Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{3x \sin^2 x}$

♣ (B<sub>6</sub>) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{h(x)}{3x\sqrt{x} \sin^2 x} dx$ .



(d) Determinare l'insieme immagine  $\text{Im}(f)$ . Dedurre da questa informazione il numero degli zeri di  $f$ .

(e) Dire che cosa è il rapporto incrementale di una generica funzione  $g(x)$  relativo ad un suo punto  $x_0$ . Definire poi la derivata prima di  $g(x)$  calcolata in  $x_0$ .

(f)  $\diamond$  (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà) Relativamente alla funzione  $f(x) = 8 + 5x + e^{-x}$  di questo esercizio, ricavare  $f'(0)$  in due modi diversi: come limite di un opportuno rapporto incrementale oppure' calcolando  $f'(x)$  in  $x = 0$ .

### ESERCIZIO 3.

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[4]{(1 - \cos x)^3}} + \sqrt[3]{x^2} \log x$$

(a) Calcolare l' integrale indefinito  $\int f(x)dx$ .

♣ (b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

◇ **ESERCIZIO 4** (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà)

Cinque amministratori pubblici (i Signori A, B, M, P, S) vengono condotti in carcere alle Vallette, dove hanno a disposizione tre celle singole (indistinguibili tra loro) e una doppia.

(A) Quante sono le diverse possibilità di occupazione delle celle, se non ci sono restrizioni?

(B) Fonti sicure affermano che A sarà alloggiato in una singola, e che, se B finirà nella doppia, anche P lo seguirà. In questo caso:

(B<sub>1</sub>) quante sono le diverse possibilità di occupazione delle celle?

(B<sub>2</sub>) quante possibilità ha il Signor B di finire in una qualsiasi delle singole?

(B<sub>3</sub>) il Signor M e il Signor S hanno le stesse possibilità di finire in una singola?

(B<sub>4</sub>) quale dei cinque signori ha le minori possibilità di finire in una singola?

♣ **ESERCIZIO 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Definire che cosa è una serie geometrica, discuterne la convergenza e il valore della somma.

(B) E' data la serie, dipendente dal parametro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{4a^2 - 3}{4a} \right)^n$$

(B<sub>1</sub>) Dire se la serie converge quando  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  oppure quando  $a = \frac{1}{2}$ .

(B<sub>2</sub>) Provare che non esiste nessun valore di  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  per cui la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{4a^2 - 3}{4a} \right)^n$  abbia per somma  $S = \frac{1}{2}$ .

(B<sub>3</sub>) Dire per quali valori di  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  converge la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{4a^2 - 3}{4a} \right)^n$