Corso Teledidattico
(ANALISI) MATEMATICA I (A)
VERSIONE A

Svolgimento tema d'esame del 20 settembre 2003

Esercizio 1

a) *La serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7}{6n^3}$ *converge.* $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ perché

VERO. Si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7}{6n^3} = \frac{7}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ e quest'ultima è una serie armonica generalizzata del tipo $\dfrac{1}{n^\alpha}$, che converge essendo $\alpha = 3 > 1$.

b) *Si ha* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ perché

FALSO. Trattandosi di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

♣ **c)** *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ *converge* $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ perché

VERO. Si tratta di una serie a segni alterni. La successione $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ è:

- decrescente $\left(\text{in quanto } \sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{n} \text{ e quindi } \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$,
- infinitesima $\left(\text{in quanto } \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0\right)$.

Dunque, applicando il criterio di convergenza di Leibnitz si può concludere che la serie converge.

♣ **d)** *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ *converge assolutamente:* $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ perché

FALSO. La serie dei valori assoluti è la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, che è una serie armonica generalizzata del tipo $\dfrac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha = \frac{1}{3}$, e quindi non convergente perché $\frac{1}{3} < 1$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+6}}{3x-4}.$$

a) *Trovare il dominio, gli zeri e il segno di f.*

Per determinare il dominio è necessario richiedere che sia $2x + 6 \geq 0$ (perché la radice sia ben definita) e $3x - 4 \neq 0$ (perché il denominatore non si annulli). Il dominio è quindi costituito da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 2x + 6 \geq 0 \\ 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Il dominio è quindi l'insieme $\mathcal{D} = [-3, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$.

La funzione si annulla se $\sqrt{2x+6} = 0$ e quindi l'unico zero è il punto $x = -3$.

Infine, per determinare il segno, osserviamo che il numeratore, all'interno del dominio della funzione, è sempre non negativo e quindi non influisce sul segno di f. Il denominatore invece è positivo per $x > \frac{4}{3}$ e negativo per $x < \frac{4}{3}$. In definitiva, la funzione sarà quindi negativa $x \in (-3, \frac{4}{3})$, positiva per $x \in (\frac{4}{3}, +\infty)$ e si annulla per $x = -3$.

b) *Calcolarne i limiti agli estremi del dominio e indicare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).*

Si ha

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{2x+6}}{3x-4} = f(-3) = 0; \tag{1}$$

$$\lim_{x \to \frac{4}{3}^-} \frac{\sqrt{2x+6}}{3x-4} = -\infty; \tag{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{4}{3}^+} \frac{\sqrt{2x+6}}{3x-4} = +\infty; \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x+6}}{3x-4} = 0. \tag{4}$$

Il limite (4) segue dall'osservazione che il numeratore è un infinito di ordine inferiore rispetto al denominatore. Dai limiti (2-3) segue che la retta $x = \frac{4}{3}$ è un asintoto verticale bilaterale; dal limite (4) segue che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.

c) *Calcolare la derivata prima, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo di f.*

Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+6}} \cdot (3x-4) - \sqrt{2x+6} \cdot 3}{(3x-4)^2} = \frac{(3x-4) - (2x+6) \cdot 3}{\sqrt{2x+6}(3x-4)^2} = \frac{-3x - 22}{\sqrt{2x+6}(3x-4)^2}.$$

Per determinare intervalli di monotonia, massimi e minimi, studiamo il segno di $f'(x)$. Il denominatore è sempre positivo. Il numeratore è positivo se $-3x - 22 > 0$, ovvero se $x < -\frac{22}{3}$. Poichè $-\frac{22}{3} < -3$, si può concludere che in tutto il dominio $f'(x) < 0$. Per quanto riguarda gli intervalli di monotonia, si può concludere che la funzione è:

- monotona decrescente in $[-3, \frac{4}{3})$;
- monotona decrescente in $(\frac{4}{3}, +\infty)$.

Si osservi che <u>non</u> si può concludere che f è monotona decrescente in tutto il dominio, perché nel punto $x = \frac{4}{3}$ la funzione non è definita, oltre che non derivabile. Infatti, per valori a "destra" di $\frac{4}{3}$, la funzione torna ad assumere valori superiori a quelli che assumeva a "sinistra", essendo il limite per $x \to \frac{4}{3}^+$ uguale a $+\infty$ e il limite per $x \to \frac{4}{3}^-$ uguale a $-\infty$ (cfr. limiti (2-3)). Visto l'andamento della funzione, si può aggiungere che il punto $x = -3$ è un punto di massimo locale, in cui la funzione assume il valore $f(-3) = 0$, e che non esistono altri estremi relativi.

♣ **d)** *Calcolare* $\lim_{x\to -3^+} f'(x)$. *Dedurne l'equazione della tangente al grafico di* f *nel punto di ascissa* $x = -3$.

Si ha

$$\lim_{x\to -3^+} f'(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{-3x - 22}{\sqrt{2x+6}(3x-4)^2} = -\infty.$$

Ne segue che la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = -3$ è verticale, e quindi è la retta $x = -3$.

e) *Disegnare un grafico qualitativo di* f. Si vedano le Figure 1 e 2 (la Figura 2 rappresenta un ingrandimento del grafico vicino al punto $x = -3$).

Esercizio 3
Data la funzione

$$f(x) = \cos(2x) - \sqrt{1 - 4x^2}\,,$$

a) *Trovare il polinomio di Mac Laurin di grado 4 di* $f(x)$.

Cominciamo a ricordare i polinomi di Mac Laurin (noti) delle funzioni $\cos y$ e $\sqrt{1+t}$, rispettivamente, arrestandoci all'ordine 4 nel primo caso e all'ordine 4 nel secondo. Si ha

$$\begin{aligned} \cos y &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4); \\ \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2). \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo rispettivamente nei due sviluppi $y = 2x$ e $t = -4x^2$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) - 1 - \frac{(-4x^2)}{2} + \frac{(-4x^2)^2}{8} + o(x^4) \\ &= -\frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{8} + o(x^4) = \frac{8}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

♣ **b)** *Sfruttando il risultato precedente, calcolare* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x^4}$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8}{3}x^4 + o(x^4)}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8}{3}x^4}{3x^4} = \frac{8}{9}$$

Esercizio 4
È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{se} \quad x \le 6 \\ \frac{2x-12}{x^2-9} & \text{se} \quad x > 6. \end{cases}$$

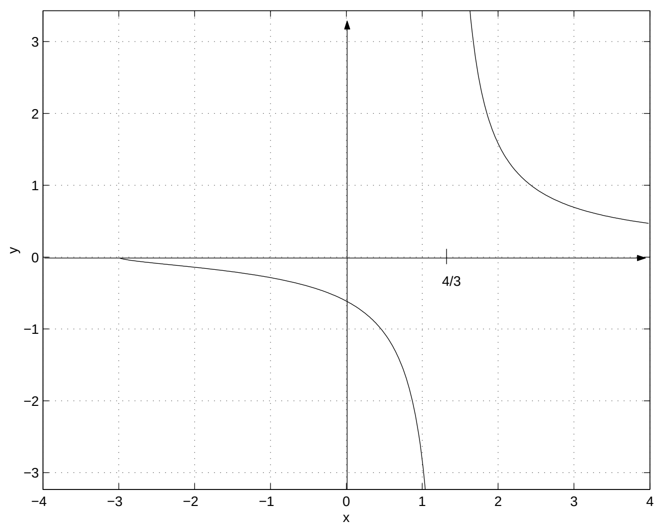

Figure 1: Grafico della funzione dell'esercizio 2.

a) *Dire se $f(x)$ è continua e se è derivabile su $\mathbb{R}$.*

Poniamo $f_1(x) = x - 6$ e $f_2(x) = \frac{2x-12}{x^2-9}$. Osserviamo che ciascuno dei due tratti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ è continuo e derivabile nel proprio intervallo (la funzione $f_2(x)$ non è definita in $x = \pm 3$, ma tali punti non appartengono all'intervallo $(6, +\infty)$ nel quale noi dobbiamo considerare $f_2(x)$). Resta da vedere come i due tratti si raccordano nel punto $x = 6$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 6^-} f(x) &= \lim_{x \to 6^-} f_1(x) = 0; \\
\lim_{x \to 6^+} f(x) &= \lim_{x \to 6^+} f_2(x) = 0.
\end{aligned}$$

Inoltre, $f(6) = f_1(6) = 0$. Poichè, quindi,

$$\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^+} f(x) = f(6),$$

la funzione è continua anche in $x = 6$ e quindi è continua ovunque.

Per quanto riguarda la derivata prima si ha

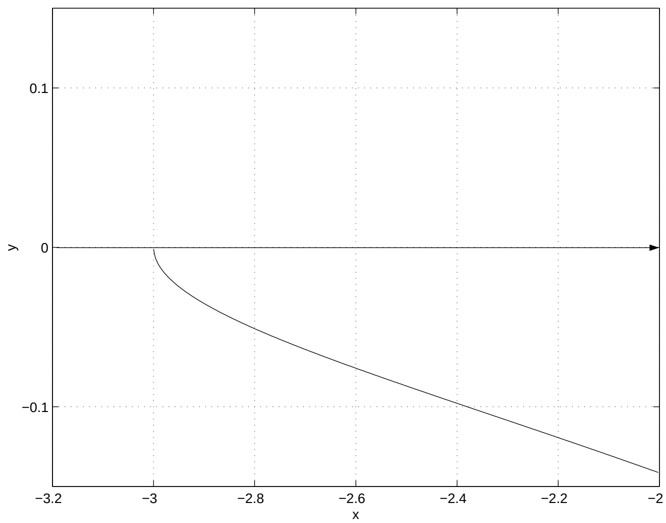

Figure 2: Grafico della funzione dell'esercizio 2. Ingrandimento intorno al punto $x = -3$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} f_1'(x) & \text{se} \quad x < 6 \\ f_2'(x) & \text{se} \quad x > 6 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 6 \\ \frac{2\cdot(x^2-9)-(2x-12)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} & \text{se} \quad x > 6. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 6 \\ \frac{-2x^2+24x-18}{(x^2-9)^2} & \text{se} \quad x > 6. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 6^-} f'(x) &= \lim_{x\to 6^-} f_1'(x) = 1; \\
\lim_{x\to 6^+} f'(x) &= \lim_{x\to 6^+} f_2'(x) = \frac{2}{27}.
\end{aligned}
$$

Poichè $\lim\limits_{x\to 6^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 6^+} f'(x)$, la funzione non è derivabile in $x = 6$.

b) *Dire se ad $f(x)$ è applicabile il teorema di Lagrange sull'intervallo* $[0, 8]$.

No, perché come visto al punto precedente f non è derivabile nel punto $x = 6$ che è interno all'intervallo $[0, 8]$.

c) *Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ e l'asse delle x, per x che appartiene all'intervallo* $[0, 8]$.

Indicando con $\mathcal{A}$ l'area richiesta, si ha

$$\mathcal{A} = \int_0^8 |f(x)|\, dx = \int_0^6 |f_1(x)|\, dx + \int_6^8 |f_2(x)|\, dx = \int_0^6 (6 - x)\, dx + \int_6^8 \frac{2x - 12}{x^2 - 9}\, dx$$

(si ha $f_1(x) \leq 0$ per $x \in [0, 6]$ e $f_2(x) \geq 0$ per $x \in [6, 8]$). Il primo integrale si calcola immediatamente, il secondo usando la decomposizione in fratti semplici. Si ha quindi

$$\int_0^6 (6 - x)\, dx = \left[6x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2}6^2 = 18;$$

usando invece la decomposizione

$$\frac{2x - 12}{x^2 - 9} = \frac{-1}{x - 3} + \frac{3}{x + 3}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_6^8 \frac{2x - 12}{x^2 - 9}\, dx &= -\int_6^8 \frac{1}{x - 3}\, dx + 3\int_6^8 \frac{1}{x + 3}\, dx = [-\log|x - 3| + 3\log|x + 3|]_6^8 \\ &= -\log 5 + 3\log 11 + \log 3 - 3\log 9 = -\log 5 + 3\log 11 - 5\log 3. \end{aligned}$$

♣ **d)** *Calcolare l'integrale improprio* $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{2x - 12}{x^2 - 9}\, dx$.

Si tratta di un integrale improprio perché l'intervallo di integrazione è illimitato. Verifichiamo la convergenza dell'integrale. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{b \to +\infty} \int_4^b \frac{2x - 12}{x^2 - 9}\, dx &= \lim_{b \to +\infty} (-\log|b - 3| + 3\log|b + 3| + \log 1 - 3\log 7) \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left(-3\log 7 + \log\left(\frac{(b + 3)^3}{b - 3}\right)\right) = +\infty. \end{aligned}$$

L'integrale quindi diverge.